Olá amigos, tudo bem? Hoje vou mudar um pouco meu estilo e colocar, de uma forma mais direta, um novo *toque* aqui no site da Editora Ferreira. Trata-se da resolução da prova de Matemática Financeira (nível médio) do concurso para a Caixa Econômica Federal, aplicada nos estados do Rio e São Paulo, no dia 09 de maio de 2010.

Como houve mais de um tipo de prova, vou tomar como base a prova tipo *alfa*. Na resolução, vou seguir e mesma ordem das questões na prova (da 9ª até a 14ª). É pertinente observarmos que temas como *fluxo de caixa*, *capitalização composta* e *sistemas de amortização* são, de forma recorrente, objeto de questões de provas de concursos nas áreas bancária e fiscal, entre outras. A prova em tela trouxe apenas seis questões de Matemática, o que julgo aquém do ideal, dado tratar-se de uma matéria essencial para o perfil de um profissional da área financeira. Vamos às questões...

QUESTÕES

Questão 9: Um cliente tomou R$ 20.000,00 emprestados de um banco que pratica juros compostos mensais, e, após 12 meses, pagou R$ 27.220,00. Nesse caso, considerando 1,026 como valor aproximado para $1{,}361^{\frac{1}{12}}$, é correto afirmar que a taxa de juros nominal, anual, praticada pelo banco foi igual a:

a. 30,2%
b. 31,2%
c. 32,2%
d. 33,3%
e. 34,2%

Solução:

$$Lembrando\ \ que\ \ M = C(1+i)^t, teremos:$$

$$\rightarrow 27220 = 20000(1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} = \frac{27220}{20000} \Rightarrow (1+i)^{12} = 1{,}361 \Rightarrow \sqrt[12]{(1+i)^{12}} = \sqrt[12]{1{,}361}$$

$$\Rightarrow 1+i = 1{,}361^{\frac{1}{12}} \Rightarrow 1+i = 1{,}026 \Rightarrow i = 1{,}026 - 1 \Rightarrow i = 0{,}026 \therefore i = 2{,}6\%\ a.m.$$

A resposta apresentada pela banca equivale à **taxa proporcional anual**, ou seja:

12 x 2,6% a.m. = 31,2% a.a.

Gabarito: B

Questão 10: Considerando que uma dívida no valor de R$ 12.000,00, contraída pelo sistema de amortização constante (SAC), tenha sido paga em 6 prestações mensais e que o valor dos juros pagos na 5ª prestação tenha sido igual a R$ 80,00, assinale a opção correta.

a. A taxa de juros cobrada nessa transação foi de 2% ao mês.
b. Todas as prestações foram de mesmo valor.
c. Após a 5ª amortização, o valor da dívida era de R$ 4.000,00.
d. O valor dos juros pagos na 3ª prestação foi de R$ 200,00.
e. A soma das 3ª e 6ª prestações foi igual a R$ 4.000,00.

Solução: Primeiramente vamos recordar algumas características do SAC:

- As prestações (P_n, n >1) são decrescentes, ou seja $P_n < P_{n-1}$
- A amortização (A) é constante, tal que A = S_o / tempo (S_0 é o saldo inicial)
- O saldo devedor (S_n, n > 1) decresce em A a cada prestação ($S_n = S_{n-1} - A$)
- Os juros (J_n) são decrescentes, tal que $J_n = i \times S_{n-1}$ (i é a taxa de juros)
- Cada prestação é dada por $P_n = J_n + A$, n >1
- Cada prestação seguinte, P_{n+1}, diminui em i x A com relação a P_n
- O saldo devedor é representado por $S_n = S_0 - n \times A$

Na questão em tela, temos de início que:

- $S_0 = 12000$, e t = 6, então A = 12000/6 => A = 2000

- É dado ainda que $J_5 = 80$, como $P_5 = J_5 + A$, então $P_5 = 2080$

- O juro em P_5 é $J_5 = i \times S_4$, mas $S_4 = 12000 - 4 \times 2000$ => $S_4 = 4000$

- Como é dado que $J_5 = 80$, então i x 4000 = 80, logo i = 0,02 ou 2%

► Teremos assim a tabela SAC abaixo:

n	prest	juros	amort	saldo
0				12000
1	2240	240	2000	10000
2	2200	200	2000	8000
3	2160	160	2000	6000
4	2120	120	2000	4000
5	2080	80	2000	2000
6	2040	40	2000	0

Gabarito: A

Questão 11: A população P de uma comunidade, t anos após determinado ano — considerado ano t = 0 —, pode ser calculada pela fórmula $P = P_0 e^{kt}$, em que k é uma constante positiva, P_0 é a quantidade de indivíduos na comunidade no ano t = 0 e e é a base do logaritmo neperiano. Nesse caso, considerando 0,63 como valor aproximado para $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ e que a população P_0 triplique em 6 anos, então P_0 será duplicada em

a. 3,38 anos.
b. 3,48 anos.
c. 3,58 anos.
d. 3,68 anos.
e. 3,78 anos.

Solução: Vamos relembrar algumas propriedades dos logaritmos:

- $\ln e = 1$
- $\ln a.b = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^k = k \ln a$

Na questão temos primeiramente que definir k. Vamos, para isso, tomar a informação dada de que "*após seis anos a população triplica*" para:

► quando t = 6, teremos que $P = P_0 e^{6k}$

$$mas\ P_0 e^{6k} = 3P_0 \Rightarrow e^{6k} = 3 \Rightarrow \ln e^{6k} = \ln 3 \Rightarrow 6k.\ln e = \ln 3 \Rightarrow 6k = \ln 3 \therefore k = \frac{\ln 3}{6}$$

► queremos agora calcular o valor de t quando $P = 2P_0$

$$vem\ que\ 2P_0 = P_0 e^{\frac{\ln 3}{6}\times t} \Rightarrow 2 = e^{\frac{\ln 3}{6}\times t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\frac{\ln 3}{6}\times t} \Rightarrow \ln 2 = \frac{\ln 3}{6}\times t \times \ln e \Rightarrow \ln 2 = \frac{\ln 3}{6}\times t$$

$$\Rightarrow t = 6\times\frac{\ln 2}{\ln 3} \Rightarrow t = 6\times 0{,}63 \therefore t = 3{,}78$$

Gabarito: E

Questão 12: Saul e Fred poderão ser contratados por uma empresa. A probabilidade de Fred não ser contratado é igual a 0,75; a probabilidade de Saul ser contratado é igual a 0,5; e a probabilidade de os dois serem contratados é igual a 0,2. Nesse caso, é correto afirmar que a probabilidade de

a. pelo menos um dos dois ser contratado é igual a 0,75.
b. Fred ser contratado é igual a 0,5.
c. Saul ser contratado e Fred não ser contratado é igual a 0,3.
d. Fred ser contratado e Saul não ser contratado é igual a 0,1.
e. Saul não ser contratado é igual a 0,25.

Solução: Eis uma questão envolvendo probabilidades. Há de se observar que no enunciado da questão o elaborador forneceu informações contraditórias, o que causa certa confusão na resolução. Vejamos cada uma das afirmações:

1. "*A probabilidade de Fred não ser contratado é 0,75*"

$$1 - P(Fred) = 0{,}75 \Rightarrow P(Fred) = 1 - 0{,}75 \therefore P(Fred) = 0{,}25$$

2. "*A probabilidade de Saul ser contratado é igual a 0,5*"

$$P(Saul) = 0{,}5$$

3. "*A probabilidade de os dois serem contratados é 0,2*"

$$P(Saul\ e\ Fred) = P(Saul) \times P(Fred) = 0{,}2 \Rightarrow 0{,}5 \times P(Fred) = 0{,}2 \therefore P(Fred) = 0{,}4$$

► Note que o resultado da afirmação **3** contradiz o resultado da **1** ◄

Vamos analisar as alternativas:

a) Pelo menos um ser contratado, ou seja: Fred ***ou*** Saul, ou Fred ***e*** Saul (falsa)

$$pois \rightarrow 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 1{,}1\ ou\ 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}875$$

b) Fred ser contratado é igual a 0,5 (Falsa)

$$pois \rightarrow P(Fred) = 0{,}25\ ou\ 0{,}4$$

c) Saul ser contratado e Fred não ser contratado é igual a 0,3 (Verdadeira ou Falsa)

$$pois \rightarrow 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3\ \ ou\ 0{,}5 \times 0{,}75 = 0{,}375 \cong 0{,}4$$

d) Fred ser contratado e Saul não ser contratado é igual a 0,1 (Falsa ou Verdadeira)

$$pois \rightarrow 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2\ \ ou\ 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125 \cong 0{,}1$$

e) Saul não ser contratado é igual a 0,25. (Falsa)

$$pois \rightarrow 1 - P(Saul) = 0{,}5$$

Gabarito Divulgado: C

Questão 13: Antônio fez os dois investimentos seguintes, em que ambos pagam juros compostos de 3% ao mês.

I. Três depósitos mensais, consecutivos e iguais a R$ 2.000,00; o primeiro foi feito no dia 1.º/3/2009.

II. Dois depósitos mensais, consecutivos e iguais a R$ 3.000,00; o primeiro foi feito no dia 1.º/3/2009.

Considerando que M1 e M2 sejam, respectivamente, os montantes das aplicações I e II na data do terceiro depósito correspondente ao investimento I, assinale a opção correta.

a. M2 – M1 = R$ 90,90.
b. M2 – M1 = R$ 45,45.
c. M2 = M1.
d. M1 – M2 = R$ 45,45.
e. M1 – M2 = R$ 90,90.

Solução: Vamos resolver a questão de forma simples e direta, colocando os valores dos depósitos em ordem cronológica mensal, e considerando os rendimentos dos juros:

Montantes	**Depósitos + Juros de 3% a.m.**		
	1-abr	**1-mai**	**1-jun**
M1	**2000**	2000x1,03+2000 = **4060**	4060x1,03+2000 = **6181,80**
M2	**3000**	3000x1,03+3000 = **6090**	6090x1,03 = **6272,70**

Analisando as alternativas, na data do 3º depósito de I, temos que:

a. M2 – M1 = R$ 90,90 (Verdadeira)
b. M2 – M1 = R$ 45,45 (Falsa)
c. M2 = M1 (Falsa)
d. M1 – M2 = R$ 45,45 (Falsa)
e. M1 – M2 = R$ 90,90 (Falsa)

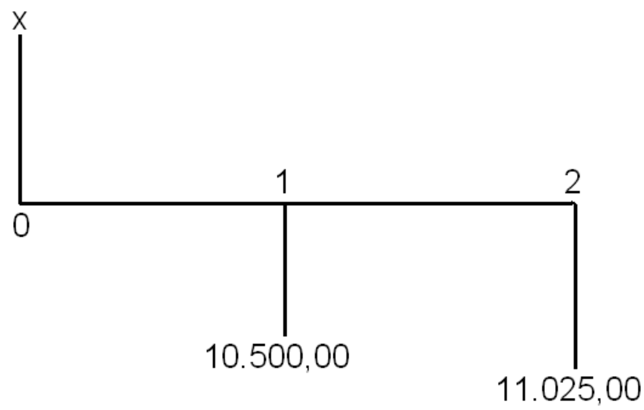
► Cabe observar que essa questão envolve, mais uma vez, o regime de juros compostos, agora de uma forma ainda mais direta.

Gabarito: A

Questão 14: Uma instituição financeira capta investimentos oferecendo a taxa interna de retorno de 5% ao mês. Se, ao investir determinada quantia, um investidor fez duas retiradas, uma no valor de R$ 10.500,00 um mês após a data do depósito, e outra, no valor restante de R$ 11.025,00, dois meses após o depósito, então o valor investido foi igual a

a. R$ 18.000,00.
b. R$ 18.500,00.
c. R$ 19.000,00.
d. R$ 19.500,00.
e. R$ 20.000,00.

Solução: Finalmente, uma questão envolvendo fluxos de caixa. Para resolvermos cabe lembrar que a taxa interna de retorno é a taxa que "zera" o fluxo de caixa. Com base no enunciado da questão, podemos montar um fluxo entre entradas e saídas, tal que:



► Tomando x como o valor inicial investido, teremos, para a TIR de 5%:

$$\frac{x}{(1+0{,}05)^0} = \frac{10500}{(1+0{,}05)^1} + \frac{11025}{(1+0{,}05)^2} \Rightarrow x = \frac{10500}{1{,}05} + \frac{11025}{1{,}1025} \Rightarrow x = 10000 + 10000 \therefore x = 20000$$

Gabarito: E