11. Em uma caixa há 12 bolas de mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Uma pessoa, no escuro, deve retirar *n* bolas da caixa e ter a certeza de que, entre elas, existem três da mesma cor. O menor valor de *n* para que se tenha essa certeza é:

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

RESOLUÇÃO:

Antes de resolver especificamente, vamos explicar de forma a abranger outras questões do tipo. Trata a questão, do princípio do pombal ou princípio da casa dos pombos, que afirma que se *n* pombos são colocados em *m* casas de pombos, e n > m, pelo menos uma das casas contém mais de um pombo.

Suponha 12 pombos presos e 12 casas de pombos. Se soltarmos todos os pombos, não podemos garantir que 2 pombos entrarão na mesma casa. Pode ser que cada um entre em uma única casa. Mas se tivermos 13 pombos, com certeza uma das casas conterá 2 pombos. Trazendo para um exemplo de questão comum de ser cobrada: Sabendo que existem n pessoas em uma sala, qual o número mínimo de pessoas para garantir que 2 nasceram no mesmo mês?

Resposta: Temos 12 meses no ano e pelo princípio da casa dos pombos: (12*1) + 1 = 13 pessoas.

E, se a pergunta fosse: qual o número mínimo de pessoas para garantir que 3 nasceram no mesmo mês?

Resposta: pelo princípio da casa dos pombos: (12*2) + 1 = 25 pessoas. Se pegássemos 24 pessoas, poderíamos ter 2 nascidas em cada mês do ano. Adicionando mais uma pessoa, teremos a certeza de que ela nasceu no mesmo mês que, pelo menos (na pior hipótese), outras 2 pessoas presentes na sala e assim, teríamos garantido 3 pessoas com o mesmo mês de nascimento.

E, se a pergunta fosse: qual o número mínimo de pessoas para garantir que 4 nasceram no mesmo mês?

Resposta: pelo princípio da casa dos pombos: (12*3) + 1 = 37 pessoas.

Mais um exemplo: Quantas jogadas de dado teremos que fazer para ter certeza que um mesmo número será sorteado 2 vezes?

Resposta: Pensando na pior hipótese, pode acontecer de, jogando 6 vezes o dado, serem diferentes os 6 números sorteados. E se jogarmos o dado novamente? Com certeza o resultado será igual a um dos números anteriormente sorteados. Então, com 7 jogadas, garantiremos 2 resultados iguais.

Pelo princípio da casa dos pombos: (6*1) + 1 = 7 jogadas.

Agora vamos para a questão dada, especificamente nesta prova, que pede o número mínimo de bolas a retirar da caixa de forma a que se tenha a certeza de que 3 bolas serão da mesma cor.

Temos 3 cores para as bolas (brancas, vermelhas e pretas). É como se fossem as casas;

Bolas a retirar: n (é como se fossem os pombos);

Número de coincidências desejado: 3.

Pelo princípio da casa dos pombos: (3*2) + 1 = **7 bolas**.

Se quiséssemos apenas 2 bolas iguais, a resposta seria: (3*1) + 1 = 4 bolas.

Gabarito: Letra **C**.

12. A seqüência abaixo é formada com as letras da palavra BRASIL.

A L B R I S A L B R I S A L B R I S A L B R ....

Mantendo a ordem em que as letras aparecem, a letra que ocupa a 250ª posição é:

A) B
B) R
C) A
D) S
E) I

<u>RESOLUÇÃO</u>:

Como a seqüência ALBRIS repete-se indefinidamente basta observar as posições que as letras ocupam:

A	L	B	R	I	S	A	L	B	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Agora note que:

Se dividirmos 1 por 6 teremos quociente zero e resto 1;

Se dividirmos 2 por 6 teremos quociente zero e resto 2;

. .

. .

. .

Se dividirmos 6 por 6, teremos quociente um e resto 0;

Se dividirmos 7 por 6, teremos quociente um e resto 1. Dividindo 8 por 6, resto 2 e assim por diante.

Já podemos raciocinar que:

Quando o resto da divisão por 6 for:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
A letra correspondente será:	A	L	B	R	I	S

Dividindo 250 por 6, teremos quociente 41 e **resto 4**.

Portanto a letra correspondente será **R**.

<u>Gabarito</u>: Letra **B**.

13. A negação de "Nenhum atleta é gordo" é:

A) Há pelo menos um atleta gordo.
B) Alguns gordos são atletas.
C) Todos os atletas são gordos.
D) Todos os gordos são atletas.
E) Todos os atletas são magros.

<u>RESOLUÇÃO</u>:

A sentença "Nenhum atleta é gordo" equivale à sentença: "**Não existe** atleta gordo", que poderíamos escrever na linguagem lógica como: $\nexists_X$ p(x). Para negá-la, basta negar o quantificador existencial ($\exists$). Como ele já está sendo negado e a negação da negação passa a ser uma afirmação, teremos: $\exists_X$ p(x), ou seja, "Existe atleta gordo", que equivale a "Algum atleta é gordo", ou ainda: "Há pelo menos um atleta gordo"**.**

<u>Gabarito</u>: Letra **A**.

14. Um consórcio de empresas de engenharia fez um concurso para recrutar profissionais de diversas áreas, que irão trabalhar na construção de uma grande represa. Sabe-se que, entre os candidatos, 30% dos homens tinham curso superior e que 10% das mulheres tinham curso superior. Sabe-se, ainda, que, considerando o total de candidatos, 18% tinham curso superior. Então, entre os candidatos, a porcentagem de homens é de:

A) 30%

B) 40%

C) 50%

D) 60%

E) 70%

<u>RESOLUÇÃO</u>:

Como no enunciado não é dita a quantidade de candidatos e as informações estão na forma percentual, facilitará muito considerarmos a quantidade **<u>total</u>** de profissionais como sendo igual a **100**.

Podemos então facilmente resolver criando uma tabela de dupla entrada e utilizando os dados do enunciado, que informa que, do total de candidatos, 18% tinham curso superior. Então colocamos 18 com curso superior e a diferença dessa quantidade para 100 será o número de candidatos sem curso superior. Como não é dito o percentual de candidatos homens, colocaremos X para o total de homens e 100 – X para o total de mulheres.

	Homens	Mulheres	Total
Com curso superior			18
Sem curso superior			82
Total	X	100 – X	**100**

Como é dito que 30% dos homens e 10% das mulheres tinham curso superior, teremos:

	Homens	Mulheres	Total
Com curso superior	0,3X	0,1(100 – X)	18
Sem curso superior			82
Total	X	100 – X	**100**

Agora, é só resolver a seguinte equação: $0{,}3X + 10 - 0{,}1X = 18$.

$0{,}2X = 8 \Rightarrow X = 40$. Como arbitramos o total como 100, a porcentagem de homens é **40%**.

<u>Gabarito</u>: Letra **B**.

15. Na seção de pediatria de certo hospital trabalham 4 médicos e 6 médicas. Sorteando ao acaso dois deles, a probabilidade que eles sejam do mesmo sexo é:

A) 1/2

B) 3/8

C) 4/9

D) 5/15

E) 7/15

<u>RESOLUÇÃO</u>:

Serão sorteadas duas pessoas. Para ser do mesmo sexo, podem ser dois homens <u>ou</u> duas mulheres.

Designando homem por H e mulher por M, queremos calcular: $P[(H \cap H) \cup (M \cap M)]$.

Para a probabilidade de serem dois homens, temos que raciocinar que: no 1º sorteio, a probabilidade de ser homem será 4/10, mas no 2º sorteio, caso tenha sido sorteado um homem no 1º, a probabilidade de ser homem será 3/9.

Para a probabilidade de serem duas mulheres: a probabilidade de ser mulher no 1º sorteio será 6/10, mas no 2º sorteio, caso tenha sido sorteada uma mulher no 1º, a probabilidade de ser mulher será 5/9.

Então temos: $P[(H \cap H) \cup (M \cap M)] = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} = \boxed{\frac{7}{15}}$

<u>Gabarito</u>: Letra **E**.

41. Um aparelho de fax da SEPLAG recebe 160 mensagens em 8 horas de funcionamento. Logo, a probabilidade de que em 12 minutos receba, no máximo, 2 mensagens é de:

A) $20 \cdot e^{-8}$

B) $13 \cdot e^{-4}$

C) $12 \cdot e^{-4}$

D) $8 \cdot e^{-8}$

E) $8 \cdot e^{-12}$

RESOLUÇÃO:

Trata-se de uma distribuição de Poisson com parâmetro **λ = 4**, pois:

160 mensagens em 8 horas = 20 mensagens em 1 hora = **4** mensagens em 12 minutos (12 minutos = 1/5 de hora).

A probabilidade de "k" sucessos é dada por: $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$.

É pedida a probabilidade de receber, no máximo, 2 mensagens em 12 minutos.

Portanto, a probabilidade de receber 0 ou receber 1 ou receber 2 mensagens.

$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.

$P(X = 0) = \dfrac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} = e^{-4}$;

$P(X = 1) = \dfrac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} = 4e^{-4}$;

$P(X = 2) = \dfrac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} = 8e^{-4}$;

Logo: $P(X \le 2) = e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4} = \mathbf{13e^{-4}}$.

Gabarito: Letra **B**.

42. Uma pesquisa com 200 candidatos que prestaram o concurso anterior da SEPLAG e que estudaram para o concurso em três cursos diferentes, revelou os seguintes resultados quanto à aprovação desses candidatos:

RESULTADO	CURSOS		
	A	B	C
APROVADOS	30	40	50
REPROVADOS	30	20	30

Deseja-se testar a hipótese de que o curso influencia na aprovação. O número de graus de liberdade a ser utilizado e o valor aproximado da estatística qui-quadrado usual para os dados acima serão, respectivamente:

A) 6 e 8,32
B) 4 e 5,82
C) 2 e 3,82
D) 4 e 3,28
E) 2 e 2,38

RESOLUÇÃO:

Para encontrar o valor da estatística qui-quadrado, temos que fazer:

$\boxed{\chi^2 = \sum \frac{(o - e)^2}{e}}$, onde a letra ***o*** representa cada valor observado e a letra ***e*** representa o correspondente valor esperado.

Para calcular os valores esperados, vamos utilizar a tabela dada para os valores observados e acrescentar uma coluna para os totais das linhas e uma linha para os totais das colunas:

RESULTADO	**CURSOS**			TOTAIS
	A	**B**	**C**	
APROVADOS	30	40	50	**120**
REPROVADOS	30	20	30	**80**
TOTAIS	**60**	**60**	**80**	**200**

Para encontrar o valor esperado de cada célula, basta multiplicar o total de cada coluna pelo correspondente total de linha e dividir pelo total 200, por exemplo:

O valor esperado de aprovados nos cursos A e B é de 36, pois $\frac{60 \cdot 120}{200} = 36$;

O valor esperado de reprovados nesses cursos é de 24, pois $\frac{60 \cdot 80}{200} = 24$.

Esse valor também pode ser encontrado fazendo a diferença entre 60 (total) e 36 (esperança de aprovados);

O valor esperado de aprovados no curso C é de 48, pois $\frac{80 \cdot 120}{200} = 48$.

E o valor esperado de reprovados 80 – 48 = 32.

Podemos aproveitar a própria tabela dada na prova para colocar a diferença entre o valor observado e o correspondente valor esperado:

RESULTADO	**CURSOS**		
	A (o –e)	**B (o –e)**	**C (o –e)**
APROVADOS	30 – 36	40 – 36	50 – 48
REPROVADOS	30 – 24	20 – 24	30 – 32

Agora é só aplicar a fórmula, fazendo o somatório dos resultados de cada divisão dos quadrados das diferenças pelo correspondente valor esperado:

$$\chi^2 = \frac{(-6)^2}{36} + \frac{(4)^2}{36} + \frac{(2)^2}{48} + \frac{(6)^2}{24} + \frac{(-4)^2}{24} + \frac{(-2)^2}{32} \Rightarrow \chi^2 = \frac{36}{36} + \frac{16}{36} + \frac{4}{48} + \frac{36}{24} + \frac{16}{24} + \frac{4}{32}.$$

Simplificando as frações, temos: $\chi^2 = 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{12} + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{8}$, cujo MMC dos denominadores será 72.

Então: $\chi^2 = \frac{72 + 32 + 6 + 108 + 48 + 9}{72} = \frac{275}{72} \cong$ **3,82**.

Para encontrar o número de graus de liberdade (φ) aplicáveis ao teste fazemos:

(NC – 1)·(NL – 1), onde NC é o número de colunas e NL é o número de linhas da tabela. No caso, temos 3 colunas (cursos A, B, C) e 2 linhas (aprovados e reprovados). Logo, φ = (3 – 1)·(2 – 1) = 2·1 = **2**.

Gabarito: Letra **C**.

43. Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias não-correlacionadas, e seus desvios-padrão respectivamente iguais a: 16; 12 e 5. Se as variáveis U e V são definidas como U = X + Y e V = Z + Y, então, o coeficiente de correlação entre U e V será igual a:

A) $\frac{192}{260}$

B) $\frac{78}{130}$

C) $\frac{36}{65}$

D) $\frac{27}{65}$

E) $\frac{21}{65}$

<u>RESOLUÇÃO</u>:

$\sigma_X = 16$ (desvio padrão de X) $\Rightarrow \sigma_X^2 = 256$ (variância de X);

$\sigma_y = 12$ (desvio padrão de Y) $\Rightarrow \sigma_y^2 = 144$ (variância de Y);

$\sigma_z = 5$ (desvio padrão de Z) $\Rightarrow \sigma_z^2 = 25$ (variância de Z);

O coeficiente de correlação entre U e V será dado por: $\rho_{uv} = \frac{cov(U,V)}{\sigma_U \cdot \sigma_V}$.

A variável U é definida como sendo a soma entre X e Y, variáveis não-correlacionadas. Logo, pelas propriedades da variância, temos:

V[U] = V[X] + V[Y] = 256 + 144 = 400 e $\boxed{\sigma_U = 20}$.

A variável V é definida como sendo a soma entre Z e Y, variáveis não-correlacionadas. Logo, pelas propriedades da variância, temos:

V[V] = V[Z] + V[Y] = 25 + 144 = 169 e $\boxed{\sigma_V = 13}$.

Só falta encontrar a covariância entre U e V, para podermos calcular o coeficiente de correlação.

Temos que: U = X + Y

e V = Z + Y

Logo, U + V = X + Z + 2Y

Pelas propriedades da variância: V[U + V] = V[X] + V[Z] + 2^2V[Y] = 256 + 25 + 4·144 = 281 + 576 = 857.

Por outro lado, temos também que: V[U + V] = V[U] + V[V] + 2·cov(U,V).

Sabemos que V[U] = 400, V[V] = 169 e V[U + V] = 857.

Basta fazer: 2·cov(U,V) = V[U + V] – V[U] – V[V].

Portanto: 2·cov(U,V) = 857 – 400 – 169 $\Rightarrow$ 2·cov(U,V) = 288 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{cov(U,V)} = 144}$.

Já podemos então calcular a correlação entre U e V:

$$\rho_{uv} = \frac{cov(U,V)}{\sigma_U \cdot \sigma_V} \Rightarrow \rho_{uv} = \frac{144}{20 \cdot 13} \Rightarrow \boxed{\rho_{uv} = \frac{36}{65}}$$

<u>Gabarito</u>: Letra **C**.

44. Um fabricante de um produto alimentício afirma que a média de peso das embalagens do seu produto é de, no mínimo, 1.015 gramas. Um fiscal, não acreditando nessa afirmação, resolve testar a informação do fabricante e, para isso, selecionou uma amostra aleatória simples de 100 embalagens desse produto, obtendo um desvio-padrão amostral de 25 gramas. Considerando um teste de hipóteses unilateral à esquerda, a um nível de significância de 5%, e que $P(Z > -1{,}64) = 0{,}95$, onde Z é variável normal padrão, o menor valor de média amostral que permitirá aceitar a hipótese do fabricante é, aproximadamente, de:

A) 1,1 Kg

B) 990 gramas

C) 965 gramas

D) 1 Kg

E) 1.011 gramas

RESOLUÇÃO:

Do enunciado temos:

H_0: $\mu \geq 1.015$ (hipótese nula – afirmação do fabricante);

H_1: $\mu < 1.015$ (hipótese alternativa – suposição do fiscal);

n = 100 (tamanho da amostra);

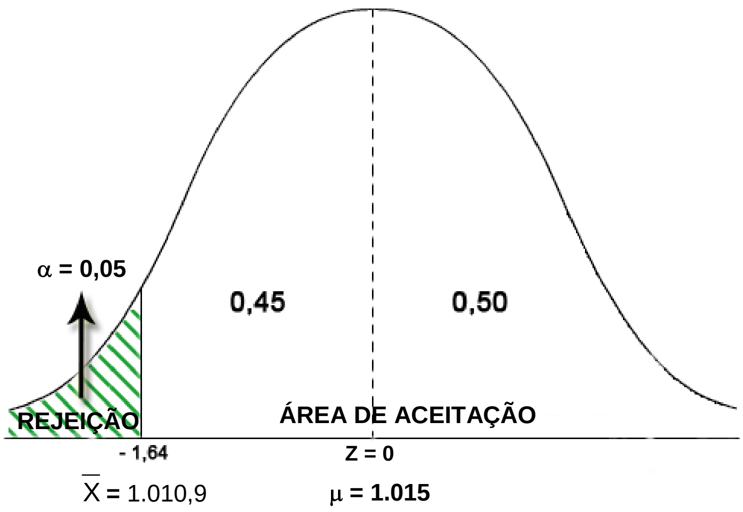
S = 25 (DP amostral);

$P(Z > -1{,}64) = 0{,}95$.

A fórmula para a estatística teste é dada por: $Z_{CALC} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

Substituindo os dados na fórmula, teremos:

$$-1{,}64 = \frac{\overline{X} - 1015}{\frac{25}{\sqrt{100}}} \Rightarrow -1{,}64 \cdot 2{,}5 = \overline{X} - 1015 \Rightarrow \overline{X} = 1015 - 4{,}1 \Rightarrow \overline{X} = 1.010{,}9.$$



Logo, a partir de uma média amostral de, aproximadamente, **1.011 gramas**, a hipótese do fabricante será aceita a um nível de significância de 5%.

Gabarito: Letra **E**.

45. Numa amostra aleatória simples, constituída por 38 funcionários da SEPLAG, obteve-se, para as suas idades, uma média amostral de 31,82 anos e uma variância amostral de 1,52anos^2. Considerando que P(Z < 1,96) = 0,975, onde Z é a variável aleatória normal padrão, o intervalo de 95% de confiança para a média populacional será de, aproximadamente:

A) [31,04; 32,60] anos

B) [31,43; 32,60] anos

C) [31,04; 32,21] anos

D) [31,43; 32,21] anos

E) [30,30; 33,34] anos

<u>RESOLUÇÃO</u>:

A estimação por intervalo para a média populacional será: $\mu = [\,\overline{X} - \varepsilon \;;\; \overline{X} + \varepsilon\,]$, onde ε é o erro da estimativa, cuja fórmula é dada por:

$$\boxed{\varepsilon = Z \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Do enunciado temos:

$\overline{X}$ = 31,82; S^2 = 1,52; n = 38 e Z = 1,96.

Substituindo os dados na fórmula teremos: $\varepsilon = 1{,}96 \cdot \dfrac{\sqrt{1{,}52}}{\sqrt{38}}$.

A raiz quadrada de 1,52 não é exata e a raiz quadrada de 38 também não. Mas podemos colocar sob uma raiz única para a fração, o que facilitará bastante o trabalho de cálculo, pois o resultado da divisão de 1,52 por 38 é um quadrado perfeito. Assim:

$$\varepsilon = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{1{,}52}{38}} \Rightarrow \varepsilon = 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}04} \Rightarrow \varepsilon = 1{,}96 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \varepsilon \cong 0{,}39.$$

Logo: $\mu = [\,31{,}82 - 0{,}39 \;;\; 31{,}82 + 0{,}39\,] \Rightarrow$ **μ = [31,43 ; 32,21]**.

<u>Gabarito</u>: Letra **D**.