# Estimação por Intervalo (Intervalos de Confiança):

## 1) Intervalo de Confiança para a Média Populacional:

Muitas vezes, para obter-se a verdadeira média populacional não compensa fazer um levantamento a 100% da população (censo). Devido ao custo (e também ao tempo despendido) é muito mais prático e econômico examinar apenas uma parte da população (amostra). Porém, ao examinarmos apenas uma parte da população perderemos um pouco da precisão, ou seja, quando fizermos uma estimativa para o verdadeiro parâmetro populacional ($\mu$ ou $\sigma^2$, por exemplo) com base numa amostra estaremos sujeitos a um erro ($\varepsilon$) para essa estimativa. O valor desse erro ($\varepsilon$) variará em função:

1) do tamanho da amostra (n);

2) da variância (populacional ou amostral);

3) do nível de significância ($\alpha$), que é a probabilidade de errar a estimativa.

Mais adiante, quando vermos a fórmula para cálculo do erro, veremos a influência de cada um desses fatores no valor do erro.

Temos que:

$$P\left[\overline{X} - \varepsilon \leq \mu \leq \overline{X} + \varepsilon\right] = 1 - \alpha .$$

O que significa dizer que a probabilidade P da média populacional ($\mu$) estar entre a média amostral menos o erro $\left(\overline{X} - \varepsilon\right)$ e a média amostral mais o erro $\left(\overline{X} + \varepsilon\right)$ será igual ao nível de confiança $(1 - \alpha)$.

Então:

$\overline{X} - \varepsilon$ → é o limite inferior da estimativa (LI);

$\mu$ → é a média populacional;

$\overline{X} + \varepsilon$ → é o limite superior da estimativa (LS);

$(1 - \alpha)$ → é o nível de confiança (probabilidade de acertar a estimativa);

Note que, quanto menor for o nível de significância ($\alpha$), maior será o nível de confiança ($1 - \alpha$) da estimativa. Exemplo: Para um nível de significância $\alpha$ = 0,10 (10%), teremos um nível de nível de confiança igual a 0,90 (90%). Já para um nível de significância $\alpha$ = 0,05 (5%), teremos um nível de nível de confiança igual a 0,95 (95%).

Note ainda que a amplitude (A) do intervalo de confiança será o dobro do erro ($\varepsilon$), ou seja: **A = 2$\varepsilon$**.

Demonstrando:

A amplitude do intervalo será dada pela diferença entre o limite superior (LS) e o limite inferior do intervalo (LI), ou seja: A = LS – LI.

Substituindo, temos: A = $\left(\overline{X} + \varepsilon\right) - \left(\overline{X} - \varepsilon\right) \Rightarrow$ A = $\overline{X} + \varepsilon - \overline{X} + \varepsilon \Rightarrow$ **A = 2$\varepsilon$**.

Antes de vermos a fórmula para cálculo do erro da estimativa, temos que definir claramente quais os critérios para adotar, na fórmula de cálculo, a abscissa dada pela tabela da distribuição Normal Padrão ou a que é dada pela tabela da distribuição t-Student (também chamada de distribuição das pequenas amostras). O quadro abaixo sintetiza esses critérios:

| TAMANHO DA AMOSTRA | SE A VARIÂNCIA POPULACIONAL ($\sigma^2$) | USO A DISTRIBUIÇÃO |
|---|---|---|
| É GRANDE (n > 30) | É CONHECIDA | NORMAL |
| | É DESCONHECIDA | NORMAL |
| É PEQUENO ($n \leq 30$) | É CONHECIDA | NORMAL |
| | É DESCONHECIDA | t-STUDENT |

Pelo que foi sintetizado na tabela, podemos então entender perfeitamente que:

Se a amostra for grande, pouco importa se o parâmetro populacional (variância ou o desvio padrão) é ou não conhecido, usaremos sempre a distribuição Normal. Se a amostra for pequena só usaremos a distribuição t-Student se o parâmetro populacional for desconhecido.

Conclusão:

Se **n > 30 ou** $\sigma$ for conhecido, usamos distribuição Normal;

Se **n ≤ 30 e** $\sigma$ for desconhecido, usamos distribuição t-Student;

Outro detalhe importante é que a tabela da distribuição t-Student é bi-paramétrica.

O valor da abscissa $t_{\alpha/2}$ dependerá de dois parâmetros: $\alpha$ (nível de significância) e $\varphi$ (fi) que é o número de graus de liberdade a ser usado. Este será dado por: $\varphi = n - 1$ (número de elementos da amostra subtraído de 1 unidade). A fórmula para cálculo de $\varepsilon$ (erro da estimativa) será:

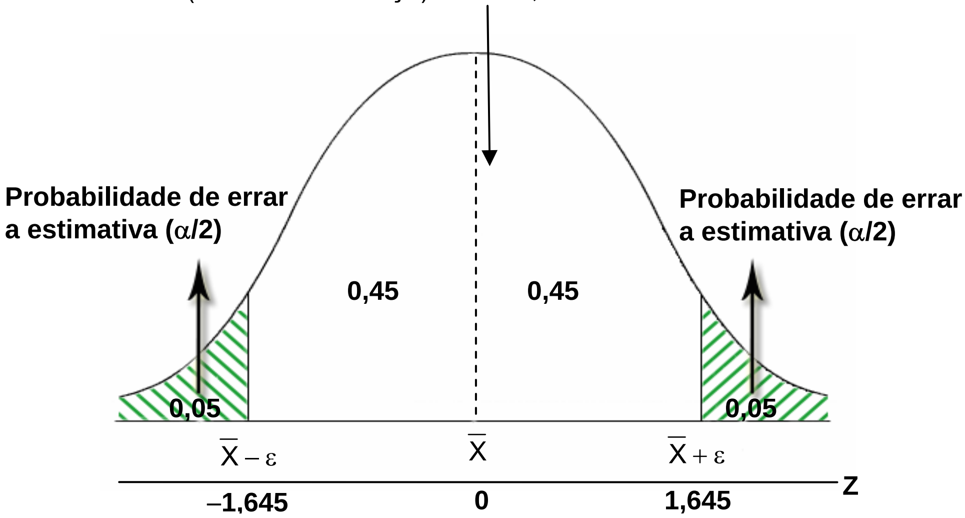
1) No caso de usarmos a distribuição Normal, sendo $\sigma$ conhecido: $\boxed{\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$;

2) Distribuição Normal, mas $\sigma$ desconhecido. Usamos S (desvio padrão amostral): $\boxed{\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}}$;

3) No caso de usarmos a distribuição t-Student: $\boxed{\varepsilon = t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}}$;

Pelo que vimos, há mais chance de usar a distribuição Normal do que a t-Student, pois esta última só será usada quando a amostra for pequena e a variância populacional for desconhecida. Na maioria dos problemas envolvendo intervalos de confiança, os valores de $\alpha$ que aparecem com maior freqüência são: $\alpha$ = 1%, $\alpha$ = 5% ou $\alpha$ = 10%. Assim, é interessante ter já gravado em mente os valores das abscissas da tabela Normal Padrão correspondentes a estes $\alpha$'s.

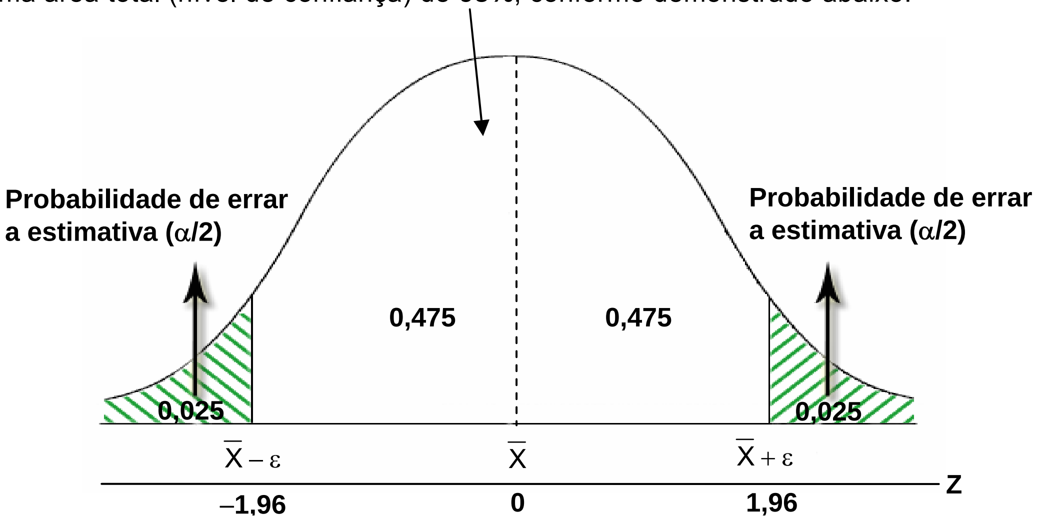
a) Se $\alpha$ **= 10%**, teremos 5% ($\alpha$/2) à esquerda do limite inferior do intervalo e 5% à direita do limite superior do intervalo, ou seja, estas serão as probabilidades da estimativa estar fora (abaixo ou acima) do intervalo especificado. Assim, teremos uma área de 45% entre a média amostral e o limite inferior do intervalo e outra área de 45% entre a média amostral e o limite superior do intervalo, o que nos fornece uma área total (nível de confiança) de **90%**, conforme demonstrado abaixo:




Procurando na tabela da distribuição Normal Padrão a área de 0,45 não encontramos exatamente este valor, mas encontramos 0,4495 que corresponde a uma abscissa de 1,64 e encontramos 0,4505 que corresponde a uma abscissa de 1,65. Podemos considerar a primeira ou, se o problema exigir maior precisão, uma abscissa de 1,645 (ponto médio entre 1,64 e 1,65) já que a área de 0,4500 será a média entre 0,4495 e 0,4505.

Logo, podemos gravar que, usando a distribuição Normal: $\boxed{\textbf{para } \alpha = 10\% \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}645}$

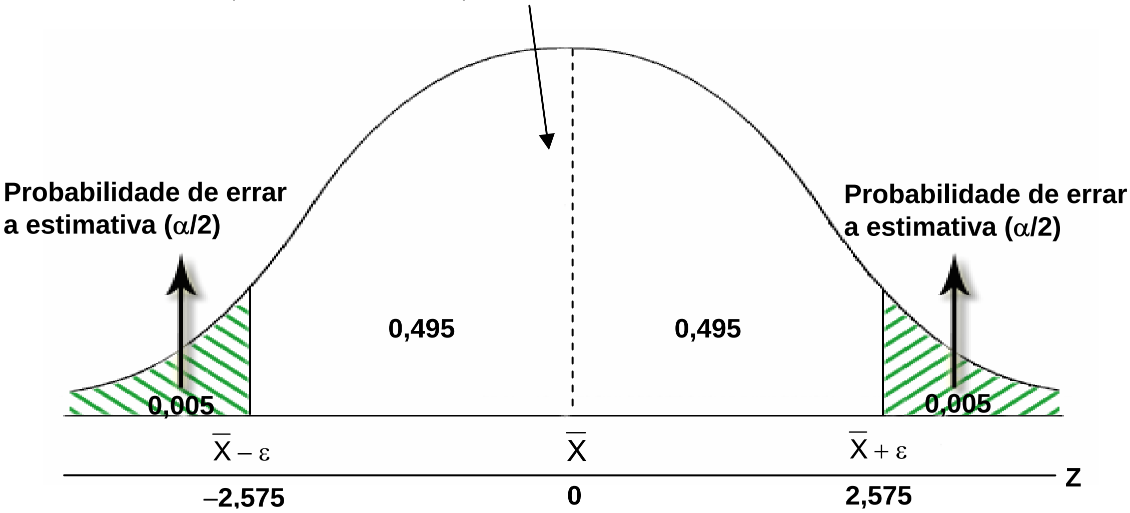
b) Se $\alpha$ **= 5%**, teremos 2,5% ($\alpha/2$) à esquerda do limite inferior do intervalo e 2,5% à direita do limite superior do intervalo, ou seja, estas serão as probabilidades da estimativa estar fora (abaixo ou acima) do intervalo especificado. Assim, teremos uma área de 47,5% entre a média amostral e o limite inferior do intervalo e outra área de 47,5% entre a média amostral e o limite superior do intervalo, o que nos fornece uma área total (nível de confiança) de **95%**, conforme demonstrado abaixo:




Procurando na tabela da distribuição Normal Padrão a área de 0,475, encontraremos exatamente este valor, correspondente a uma abscissa de 1,96.

Logo, podemos gravar que, usando a distribuição Normal: **para $\alpha$ = 5% $\Rightarrow Z_{\alpha/2}$ = 1,96**

c) Se $\alpha$ **= 1%**, teremos 0,5% ($\alpha/2$) à esquerda do limite inferior do intervalo e 0,5% à direita do limite superior do intervalo, ou seja, estas serão as probabilidades da estimativa estar fora (abaixo ou acima) do intervalo especificado. Assim, teremos uma área de 49,5% entre a média amostral e o limite inferior do intervalo e outra área de 49,5% entre a média amostral e o limite superior do intervalo, o que nos fornece uma área total (nível de confiança) de **99%**, conforme demonstrado abaixo:




Procurando na tabela da distribuição Normal Padrão a área de 0,495 não encontramos exatamente este valor, mas encontramos 0,4949 que corresponde a uma abscissa de 2,57 e encontramos 0,4951 que corresponde a uma abscissa de 2,58. Podemos considerar a segunda ou, se o problema exigir maior precisão, uma abscissa de 2,575 (ponto médio entre 2,57 e 2,58) já que a área de 0,4950 será a média entre 0,4949 e 0,4951.

Logo, podemos gravar que, usando a distribuição Normal: **para $\alpha$ = 1% $\Rightarrow Z_{\alpha/2}$ = 2,575**

Em algumas questões de provas ou exercícios pode ser pedido o tamanho mínimo da amostra para que o erro não ultrapasse um determinado valor. É importante saber a transformação da fórmula do erro ($\varepsilon$) em função do tamanho da amostra (n) para a fórmula do tamanho da amostra (n) em função do erro ($\varepsilon$).

Considerando a distribuição normal e visto que $\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, então, para colocarmos n em função de $\varepsilon$, basta trocá-los de posição e ficamos com: $\sqrt{n} = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}$.

Para eliminar a raiz quadrada elevamos ao quadrado ambos os lados da igualdade, obtendo:

$\boxed{n = \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2}$, fórmula para encontrar o tamanho da amostra dado um erro máximo.

Outro detalhe importante é que não sendo informado ou sendo desconhecido o tamanho da população (N), consideramos a população como sendo INFINITA.

Mas, <u>quando o tamanho N da população for conhecido</u> e o tamanho n da amostra for superior a 5% do tamanho N da população, ou seja: $\frac{n}{N}$ **> 0,05**, então deveremos usar como multiplicador, na formulação do erro, o <u>FATOR DE CORREÇÃO PARA POPULAÇÃO FINITA</u> dado por:

$\boxed{\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$, ou seja, o valor do erro $\varepsilon$ será calculado por: $\boxed{\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$.

## 2) <u>Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional</u>:

Seja $\theta$ a proporção de elementos de uma população com *N* elementos que possuem uma determinada característica, que pode ser, por exemplo: daltônicos, eleitores de um candidato, fumantes, portadores de uma certa doença, possuidores de um certo bem, etc. Ao extrairmos uma amostra com *n* elementos dessa população, obteremos uma proporção de elementos com essa característica.

Seja *p'* esta proporção amostral, dada por:

$\boxed{p' = \frac{X}{n}}$, onde X é o número de elementos na amostra que possuem a característica e *n* é o tamanho da amostra.

A estimativa da verdadeira proporção na população será dada por:

$\boxed{P[p' - \varepsilon \le \theta \le p' + \varepsilon] = 1 - \alpha}$, significando que a probabilidade P da proporção populacional ($\theta$) estar entre a proporção amostral menos o erro $(p' - \varepsilon)$ e a proporção amostral mais o erro $(p' + \varepsilon)$ será igual ao nível de confiança $(1 - \alpha)$ estipulado.

Na estimação por intervalo para a proporção populacional não há necessidade, como na estimação da média, de nos preocuparmos com o tamanho da amostra. **Usaremos sempre a <u>Tabela da Distribuição Normal Padrão</u>** para arbitrar o valor da abscissa na fórmula do erro da estimativa, ou seja, $Z_{\alpha/2}$.

Para um elemento da amostra escolhido ao acaso, poderá acontecer: sucesso (esse elemento tem aquela característica) ou fracasso (o elemento não tem a característica).

Agora relembremos que, na distribuição de Bernoulli (sucesso ou fracasso), a variância é dada por: V[X] = p·q, onde *p* é a probabilidade de sucesso e *q* é a probabilidade de fracasso, sendo *p* e *q* complementares ($p + q = 1$). Logo, o desvio padrão será $\sqrt{p \cdot q}$.

Na estimação por intervalo da média populacional, a fórmula do erro é dada por: $\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Mas na proporção substituiremos o desvio padrão $\sigma$ por $\sqrt{p' \cdot q'}$, onde p' será a proporção favorável na amostra e q' a proporção desfavorável e assim teremos para a fórmula do erro: $\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{p' \cdot q'}}{\sqrt{n}}$

Colocando sob um único radical fica: $\boxed{\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p' \cdot q'}{n}}}$.

Na estimativa intervalar para a Proporção, também vale a regra de utilizar, na fórmula do erro, o FATOR DE CORREÇÃO PARA POPULAÇÃO FINITA, $\boxed{\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$, sempre que o tamanho n da amostra for superior a 5% do tamanho N da população, ou seja, $\frac{n}{N}$ **> 0,05**.

Como nesta estimativa é utilizada apenas a Tabela Normal Padrão é importante já ter memorizados os valores das abscissas da Normal Padrão para os três níveis de significância mais utilizados:

**Para $\alpha$ = 10% $\Rightarrow$ $Z_{\alpha/2}$ = 1,645;**

**Para $\alpha$ = 5% $\Rightarrow$ $Z_{\alpha/2}$ = 1,96;**

**Para $\alpha$ = 1% $\Rightarrow$ $Z_{\alpha/2}$ = 2,575.**

É interessante saber também a fórmula para o tamanho mínimo da amostra (n) em função de um erro ($\varepsilon$) máximo.

A fórmula para o erro amostral na proporção é $\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p' \cdot q'}{n}}$ . Então podemos elevar ambos os termos da igualdade ao quadrado e assim $\varepsilon^2 = (Z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{p' \cdot q'}{n}$, no que resulta:

$\boxed{n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \cdot p' \cdot q'}$, que é a fórmula para encontrar o tamanho da amostra dado um erro máximo.

Devemos notar ainda, que:

Se p' = 0,10 $\Rightarrow$ p'·q' = 0,09. Idem se p' = 0,90;

Se p' = 0,20 $\Rightarrow$ p'·q' = 0,16. Idem se p' = 0,80;

Se p' = 0,30 $\Rightarrow$ p'·q' = 0,21. Idem se p' = 0,70;

Se p' = 0,40 $\Rightarrow$ p'·q' = 0,24. Idem se p' = 0,60;

**Se p' = 0,50 $\Rightarrow$ p'·q' = 0,25;**

Então, conforme página 211 do livro "Estatística Aplicada à Administração" de William J Stevenson:

"Note-se que o intervalo é máximo quando p' = 0,50, decrescendo quando p' aumenta ou diminui em razão do efeito sobre o produto p'·q'. De fato, sob condições de completa incerteza, pode-se admitir inicialmente p' = 0,50, **o que revelará a maior quantidade de erro possível**."

Assim, em questões pedindo o tamanho mínimo de amostra para que o erro não ultrapasse um determinado valor, não sendo fornecida a proporção amostral, arbitraremos p' = 0,50.

### 3) Intervalo de Confiança para a Variância:

Com base na variância obtida de uma amostra (variância amostral = $S^2$), iremos estimar a verdadeira variância populacional ($\sigma^2$) com um certo nível de significância $\alpha$ (probabilidade de errar a estimativa).

A tabela a ser utilizada no cálculo dessa estimativa é da distribuição de Qui-Quadrado com (n – 1) graus de liberdade. Assim como a tabela da distribuição t de Student, essa tabela também é bi-paramétrica. Então, levaremos em conta 2 parâmetros: nível de significância ($\alpha$) e número de graus de liberdade ($\varphi$), dado por $\varphi$ = n – 1 (número de elementos da amostra subtraído de 1 unidade).

O intervalo será dado pela seguinte fórmula:

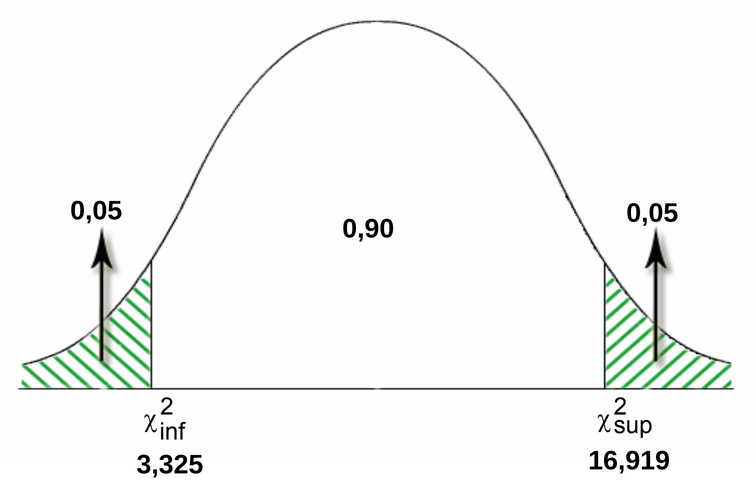
$$\boxed{P\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{sup}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{inf}}\right) = 1-\alpha}.$$

Vejamos um exemplo para facilitar o entendimento:

Suponha ter obtido, de uma amostra de 10 elementos de uma população, a variância amostral $S^2 = 4$ e queremos estimar a verdadeira variância populacional a um nível de confiança de 90%.

Solução:

Teremos então um nível de significância ($\alpha$) de 10%, sendo 5% antes do $\chi^2_{inf}$ (Qui-quadrado inferior) e 5% após o $\chi^2_{sup}$ (Qui-quadrado superior), conforme abaixo:




O valor de 3,325 para o Qui-Quadrado inferior foi obtido na tabela de distribuição Qui-Quadrado buscando-se a interseção da linha de $\varphi = 9$ (graus de liberdade) com a coluna 0,95 (área acumulada na curva da direita para a esquerda).

O valor de 16,919 para o Qui-Quadrado superior foi obtido na mesma tabela buscando-se a interseção da linha de $\varphi = 9$ (graus de liberdade) com a coluna 0,05 (área acumulada à direita da curva).

Já temos: $n - 1 = 10 - 1 = 9$; $S^2 = 4$ e os valores dos Qui-Quadrados inferior e superior.

Agora é só substituir na fórmula dada e fazer os cálculos.

$$P\left(\frac{9 \cdot 4}{16{,}919} \le \sigma^2 \le \frac{9 \cdot 4}{3{,}325}\right) = 0{,}90 \Rightarrow \boxed{P\left(2{,}128 \le \sigma^2 \le 10{,}827\right) = 0{,}90}.$$

Podemos então afirmar que a probabilidade de a verdadeira variância populacional estar entre 2,128 e 10,827 é de 90%.

## ***QUESTÕES DE CONCURSOS:***

**1)** [NCE/UFRJ - Estatístico ELETROBRÁS-2002] Uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, ..., X_{25}$, de tamanho 25, de uma distribuição normal forneceu os seguintes dados:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 123 \quad , \quad \sum_{i=1}^{25} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 96$$

Um intervalo de 95% de confiança para a média populacional será dado aproximadamente por:

(A) ] 3,59 ; 6,25 [
(B) ] 4,40 ; 5,44 [
(C) ] 2,18 ; 7,66 [
(D) ] 4,09 ; 5,75 [
(E) ] 4,88 ; 4,96 [

**Resolução comentada**:

O intervalo será dado por: $\boxed{\mu = (\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon)}$

A média amostral será: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{123}{25} = 4{,}92.$

A amostra é pequena, n = 25 (n < 30) **e** a variância populacional é desconhecida. Portanto a distribuição a ser utilizada para o cálculo do erro é a distribuição t-Student, sendo o erro calculado por: $\varepsilon = t_{\alpha/2} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

Precisamos então calcular a variância amostral, que será dada por: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$. Logo, $S^2 = \dfrac{96}{24} = 4.$

A tabela t-Student fornece, para um $\alpha$ = 5% e $\varphi$ = 24 (n – 1) graus de liberdade, o valor 2,0639. Portanto:

$\varepsilon = 2{,}0639 \cdot \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} \Rightarrow \varepsilon = 2{,}0639 \cdot \dfrac{2}{5} \Rightarrow \boxed{\varepsilon \cong 0{,}83}$

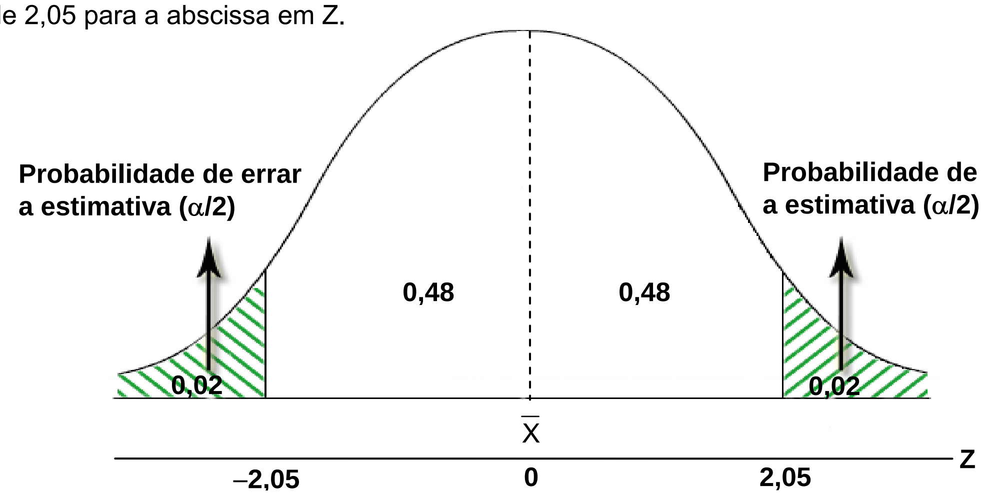
Assim, teremos: $\mu = (4{,}92 - 0{,}83;\ 4{,}92 + 0{,}83) \Rightarrow \boxed{\mu = (4{,}09;\ 5{,}75)}$ (Letra D).

**2)** [NCE/UFRJ - Estatístico ELETROBRÁS-2002] Se o desvio padrão populacional é igual a 1,2, o tamanho de uma amostra aleatória simples para que se possa garantir, com 96% de confiança, que o valor da média amostral não diferirá do da média populacional por mais de 0,05 é, no mínimo, aproximadamente:

(A) 2.420
(B) 3.080
(C) 3.755
(D) 4.340
(E) 4.755

**Resolução comentada**:

Para um intervalo de 96% teremos, áreas de 0,48 (48%) antes e depois da média. Consultando a tabela Normal Padrão veremos que uma área de 0,4798 (aproximadamente 48%) corresponde a um valor absoluto de 2,05 para a abscissa em Z.




A fórmula para encontrar o tamanho da amostra em função de um erro máximo é: $n = \left(Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$

Substituindo os valores, teremos: $n = \left(2{,}05 \cdot \dfrac{1{,}2}{0{,}05}\right)^2 \Rightarrow n = (49{,}2)^2 \Rightarrow$ **n ≅ 2.420** (Letra A).

**3)** [NCE/UFRJ - Tecnologista Junior - IBGE-2002] O tamanho de uma amostra aleatória simples para que possamos garantir, com 92% de confiança, que o valor da média da amostra não se afastará do da média populacional por mais de 10% do desvio padrão populacional é, no mínimo, aproximadamente, igual a:

(A) 254 (B) 282 (C) 306 (D) 458 (E) 560

**<u>Resolução comentada</u>**:

Questão praticamente igual à anterior, basta considerar $\varepsilon = 0{,}1\sigma$ e verificar, na tabela Normal Padrão que uma área de 0,46 (metade de 0,92) corresponde a uma abscissa de 1,75. Logo:

$$n = \left(1{,}75 \cdot \frac{\sigma}{0{,}1\sigma}\right)^2 \Rightarrow n = (17{,}5)^2 \Rightarrow \mathbf{n \cong 306} \text{ (Letra C).}$$

**4)** [NCE/UFRJ - Tecnologista Junior - IBGE-2001] Suponha que os rendimentos dos trabalhadores de um certo município apresentem um desvio padrão de R$50,00. Planeja-se estimar o rendimento mensal dos trabalhadores dessa localidade com base numa amostra aleatória simples de tamanho 400. A probabilidade de que o valor da média amostral não se afaste do valor da média populacional por mais de R$3,00 é, aproximadamente, de:

(A) 53%
(B) 60%
(C) 69%
(D) 77%
(E) 85%

**<u>Resolução comentada</u>**:

Dados do enunciado:

O erro máximo, em módulo (para mais ou para menos) será $|\varepsilon| = 3$; $\sigma = 50$; $n = 400$. Logo:

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3 = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{50}{20} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = \frac{2 \cdot 3}{5} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}2\,.$$

Procurando a abscissa de Z = 1,2 veremos que corresponde a uma área de 0,3849.

Portanto, o intervalo procurado será o dobro dessa área, ou seja, 0,7698 ou aproximadamente **77%.** (Letra D)

**5)** [FGV - Estatístico Senado Federal-2008] Um estatístico de uma companhia telefônica deseja estimar a proporção *p* de clientes satisfeitos com a introdução de um novo tipo de serviço. Suponha que o número de clientes da companhia seja grande. Sabe-se, com base em experiências anteriores, que *p* deve estar próxima de 0,50. O menor tamanho de amostra que ele deve considerar de modo a garantir com probabilidade de 95% um erro absoluto de estimação de no máximo 0,02 é:

(A) 800 (B) 1082 (C) 1530 (D) 1681 (E) 2401

**<u>Resolução comentada</u>**:

A fórmula para encontrar o tamanho da amostra dado um erro máximo, na proporção, é: $\boxed{n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \cdot p' \cdot q'}$

A abscissa da tabela Normal Padrão para uma área de 0,475 (metade de 95%) é igual a 1,96. Logo:

$$n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \Rightarrow n = (98)^2 \cdot 0{,}25 \Rightarrow n = 9604 \cdot 0{,}25 \Rightarrow \mathbf{n = 2.401} \text{ (Letra E)}$$

**6)** [NCE/UFRJ - Estatístico ELETROBRÁS-2002] A tabela a seguir fornece os valores dos percentis 2,5%, 5%, 95% e 97,5% da distribuição qui-quadrado para alguns graus de liberdade:

| *graus de lib.* | *2,5%* | *5%* | *95%* | *97,5%* |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 2,70 | 3,32 | 16,92 | 19,02 |
| 10 | 3,25 | 3,94 | 18,31 | 20,48 |
| 11 | 3,82 | 4,58 | 19,68 | 21,92 |

Uma amostra aleatória simples $X_1, X_2,...,X_{11}$ , de tamanho 11, de uma densidade $N(\mu, \sigma^2)$ com parâmetros desconhecidos foi observada e indicou

$$\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x})^2 = 180$$

Um intervalo de 95% de confiança para $\sigma^2$ será dado aproximadamente por:

(A) (1,2; 5,4)
(B) (15,4; 32,6)
(C) (24,5; 62,5)
(D) (3,6; 20,5)
(E) (8,8; 55,4)

**<u>Resolução comentada</u>**:

A variância amostral será: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x})^2}{10} = \dfrac{180}{10} \Rightarrow S^2 = 18.$

O número de graus de liberdade será dado por $\varphi = n - 1 = 11 - 1 = 10$.

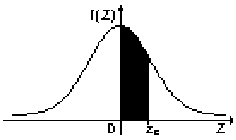
Para um $\alpha$ = 5%, fica 2,5% abaixo e 2,5% acima.

Então, observando a tabela dada no enunciado teremos: $\chi^2_{sup} = 20,48$ e $\chi^2_{inf} = 3,25$.

Substituindo na fórmula $\boxed{P\left(\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{sup}} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{inf}}\right) = 1-\alpha}$, fica:

$P\left(\dfrac{10\cdot 18}{20,48} \le \sigma^2 \le \dfrac{10\cdot 18}{3,25}\right) = 1 - 0,05 \Rightarrow \boxed{P\left(8,79 \le \sigma^2 \le 55,38\right) = 0,95}$ (Letra E).

# ***Tabelas Estatísticas***

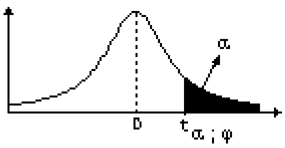



$P(0 \leq Z \leq z_c)$

**Tabela da Distribuição Normal Padrão**

**Z~N(0,1)**

| $z_c$ | **0,00** | **0,01** | **0,02** | **0,03** | **0,04** | **0,05** | **0,06** | **0,07** | **0,08** | **0,09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| **0,1** | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| **0,2** | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| **0,3** | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| **0,4** | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| **0,5** | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| **0,6** | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| **0,7** | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| **0,8** | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| **0,9** | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| **1,0** | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| **1,1** | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| **1,2** | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| **1,3** | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| **1,4** | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| **1,5** | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| **1,6** | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | *0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| **1,7** | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| **1,8** | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| **1,9** | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| **2,0** | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| **2,1** | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| **2,2** | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| **2,3** | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| **2,4** | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| **2,5** | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | *0,4951 | 0,4952 |
| **2,6** | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| **2,7** | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| **2,8** | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| **2,9** | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| **3,0** | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |
| **3,10 ou +** | 0,4999 | | | | | | | | | |




$\varphi$ = graus de liberdade

**Tabela de Distribuição t de Student**

**(Unicaudal)**

| $\varphi$ \ $\alpha$ | **25%** | **10%** | **5%** | **2,5%** | **1%** | **0,5%** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1,0000 | 3,0777 | 6,3138 | 12,7062 | 31,8207 | 63,6574 |
| **2** | 0,8165 | 1,8856 | 2,9200 | 4,3027 | 6,9646 | 9,9248 |
| **3** | 0,7649 | 1,6377 | 2,3534 | 3,1824 | 4,5407 | 5,8409 |
| **4** | 0,7407 | 1,5332 | 2,1318 | 2,7764 | 3,7469 | 4,6041 |
| **5** | 0,7267 | 1,4759 | 2,0150 | 2,5706 | 3,3649 | 4,0322 |
| **6** | 0,7176 | 1,4398 | 1,9432 | 2,4469 | 3,1427 | 3,7074 |
| **7** | 0,7111 | 1,4149 | 1,8946 | 2,3646 | 2,9980 | 3,4995 |
| **8** | 0,7064 | 1,3968 | 1,8595 | 2,3060 | 2,8965 | 3,3554 |
| **9** | 0,7027 | 1,3830 | 1,8331 | 2,2622 | 2,8214 | 3,2498 |
| **10** | 0,6998 | 1,3722 | 1,8125 | 2,2281 | 2,7638 | 3,1693 |
| **11** | 0,6974 | 1,3634 | 1,7959 | 2,2010 | 2,7181 | 3,1058 |
| **12** | 0,6955 | 1,3562 | 1,7823 | 2,1788 | 2,6810 | 3,0545 |
| **13** | 0,6938 | 1,3502 | 1,7709 | 2,1604 | 2,6503 | 3,0123 |
| **14** | 0,6924 | 1,3450 | 1,7613 | 2,1448 | 2,6245 | 2,9768 |
| **15** | 0,6912 | 1,3406 | 1,7531 | 2,1315 | 2,6025 | 2,9467 |
| **16** | 0,6901 | 1,3368 | 1,7459 | 2,1199 | 2,5835 | 2,9208 |
| **17** | 0,6892 | 1,3334 | 1,7396 | 2,1098 | 2,5669 | 2,8982 |
| **18** | 0,6884 | 1,3304 | 1,7341 | 2,1009 | 2,5524 | 2,8784 |
| **19** | 0,6876 | 1,3277 | 1,7291 | 2,0930 | 2,5395 | 2,8609 |
| **20** | 0,6870 | 1,3253 | 1,7247 | 2,0860 | 2,5280 | 2,8453 |
| **21** | 0,6864 | 1,3232 | 1,7207 | 2,0796 | 2,5177 | 2,8314 |
| **22** | 0,6858 | 1,3212 | 1,7171 | 2,0739 | 2,5083 | 2,8188 |
| **23** | 0,6853 | 1,3195 | 1,7139 | 2,0687 | 2,4999 | 2,8073 |
| **24** | 0,6848 | 1,3178 | 1,7109 | 2,0639 | 2,4922 | 2,7969 |
| **25** | 0,6844 | 1,3163 | 1,7081 | 2,0595 | 2,4851 | 2,7874 |
| **26** | 0,6840 | 1,3150 | 1,7056 | 2,0555 | 2,4786 | 2,7787 |
| **27** | 0,6837 | 1,3137 | 1,7033 | 2,0518 | 2,4727 | 2,7707 |
| **28** | 0,6834 | 1,3125 | 1,7011 | 2,0484 | 2,4671 | 2,7633 |
| **29** | 0,6830 | 1,3114 | 1,6991 | 2,0452 | 2,4620 | 2,7564 |
| **30** | 0,6828 | 1,3104 | 1,6973 | 2,0423 | 2,4573 | 2,7500 |
| **40** | 0,6807 | 1,3031 | 1,6839 | 2,0211 | 2,4233 | 2,7045 |
| **50** | 0,6794 | 1,2987 | 1,6759 | 2,0086 | 2,4033 | 2,6778 |
| **60** | 0,6786 | 1,2958 | 1,6706 | 2,0003 | 2,3901 | 2,6603 |
| **70** | 0,6780 | 1,2938 | 1,6669 | 1,9944 | 2,3808 | 2,6479 |
| **80** | 0,6776 | 1,2922 | 1,6641 | 1,9901 | 2,3739 | 2,6387 |
| **90** | 0,6772 | 1,2910 | 1,6620 | 1,9867 | 2,3685 | 2,6316 |
| **100** | 0,677 | 1,290 | 1,660 | 1,984 | 2,364 | 2,626 |
| **120** | 0,677 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 |
| $\infty$ | 0,674 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 |


$\varphi$ = graus de liberdade

## Tabela de Distribuição Qui-Quadrado

| $\varphi$ \ $\alpha$ | **0,995** | **0,99** | **0,975** | **0,95** | **0,90** | **0,75** | **0,50** | **0,25** | **0,10** | **0,05** | **0,025** | **0,01** | **0,005** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,0004 | 0,002 | 0,001 | 0,004 | 0,016 | 0,102 | 0,455 | 1,323 | 2,706 | 3,841 | 5,024 | 6,635 | 7,879 |
| **2** | 0,010 | 0,020 | 0,051 | 0,103 | 0,211 | 0,575 | 1,386 | 2,773 | 4,605 | 5,991 | 7,378 | 9,210 | 10,597 |
| **3** | 0,072 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 1,213 | 2,366 | 4,108 | 6,251 | 7,815 | 9,348 | 11,345 | 12,838 |
| **4** | 0,207 | 0,297 | 0,484 | 0,711 | 1,064 | 1,923 | 3,357 | 5,385 | 7,779 | 9,488 | 11,143 | 13,277 | 14,860 |
| **5** | 0,412 | 0,554 | 0,831 | 1,145 | 1,610 | 2,675 | 4,351 | 6,626 | 9,236 | 11,071 | 12,833 | 15,086 | 16,750 |
| **6** | 0,676 | 0,872 | 1,237 | 1,635 | 2,204 | 3,455 | 5,348 | 7,841 | 10,645 | 12,592 | 14,449 | 16,812 | 18,548 |
| **7** | 0,989 | 1,239 | 1,690 | 2,167 | 2,833 | 4,255 | 6,346 | 9,037 | 12,017 | 14,067 | 16,013 | 18,475 | 20,278 |
| **8** | 1,344 | 1,646 | 2,180 | 2,733 | 3,490 | 5,071 | 7,344 | 10,219 | 13,362 | 15,507 | 17,535 | 20,090 | 21,955 |
| **9** | 1,735 | 2,088 | 2,700 | 3,325 | 4,168 | 5,899 | 8,343 | 11,389 | 14,684 | 16,919 | 19,023 | 21,666 | 23,589 |
| **10** | 2,156 | 2,558 | 3,247 | 3,940 | 4,865 | 6,737 | 9,342 | 12,549 | 15,987 | 18,307 | 20,483 | 23,209 | 25,188 |
| **11** | 2,603 | 3,053 | 3,816 | 4,575 | 5,578 | 7,584 | 10,341 | 13,701 | 17,275 | 19,675 | 21,920 | 24,725 | 26,757 |
| **12** | 3,074 | 3,571 | 4,404 | 5,226 | 6,304 | 8,438 | 11,340 | 14,845 | 18,549 | 21,026 | 23,337 | 26,217 | 28,299 |
| **13** | 3,565 | 4,107 | 5,009 | 5,892 | 7,042 | 9,299 | 12,340 | 15,984 | 19,812 | 22,362 | 24,736 | 27,688 | 29,819 |
| **14** | 4,075 | 4,660 | 5,629 | 6,571 | 7,790 | 10,165 | 13,339 | 17,117 | 21,064 | 23,685 | 26,119 | 29,141 | 31,319 |
| **15** | 4,601 | 5,229 | 6,262 | 7,261 | 8,547 | 11,036 | 14,339 | 18,245 | 22,307 | 24,996 | 27,488 | 30,578 | 32,801 |
| **16** | 5,142 | 5,812 | 6,908 | 7,962 | 9,312 | 11,912 | 15,338 | 19,369 | 23,542 | 26,296 | 28,845 | 32,000 | 34,267 |
| **17** | 5,697 | 6,408 | 7,564 | 8,672 | 10,085 | 12,792 | 16,338 | 20,489 | 24,769 | 27,587 | 30,191 | 33,409 | 35,718 |
| **18** | 6,265 | 7,015 | 8,231 | 9,390 | 10,865 | 13,675 | 17,338 | 21,605 | 25,989 | 28,869 | 31,526 | 34,805 | 37,156 |
| **19** | 6,844 | 7,633 | 8,907 | 10,117 | 11,651 | 14,562 | 18,338 | 22,718 | 27,204 | 30,144 | 32,852 | 36,191 | 38,582 |
| **20** | 7,434 | 8,260 | 9,591 | 10,851 | 12,443 | 15,452 | 19,337 | 23,828 | 28,412 | 31,410 | 34,170 | 37,566 | 39,997 |
| **21** | 8,034 | 8,897 | 10,283 | 11,591 | 13,240 | 16,344 | 20,337 | 24,935 | 29,615 | 32,671 | 35,479 | 38,932 | 41,401 |
| **22** | 8,643 | 9,542 | 10,982 | 12,338 | 14,042 | 17,240 | 21,337 | 26,039 | 30,813 | 33,924 | 36,781 | 40,289 | 42,796 |
| **23** | 9,260 | 10,196 | 11,689 | 13,091 | 14,848 | 18,137 | 22,337 | 27,141 | 32,007 | 35,172 | 38,076 | 41,638 | 44,181 |
| **24** | 9,886 | 10,856 | 12,401 | 13,848 | 15,659 | 19,037 | 22,337 | 28,241 | 33,196 | 36,415 | 39,364 | 42,980 | 45,559 |
| **25** | 10,520 | 11,524 | 13,120 | 14,611 | 16,473 | 19,939 | 24,337 | 29,339 | 34,382 | 37,652 | 40,646 | 44,314 | 46,928 |
| **26** | 11,160 | 12,198 | 13,844 | 15,379 | 17,292 | 20,843 | 25,336 | 30,434 | 35,563 | 38,885 | 41,923 | 45,642 | 48,290 |
| **27** | 11,808 | 12,879 | 14,573 | 16,151 | 18,114 | 21,749 | 26,336 | 31,528 | 36,741 | 40,113 | 43,194 | 46,963 | 49,645 |
| **28** | 12,461 | 13,565 | 15,308 | 16,928 | 18,939 | 22,657 | 27,336 | 32,620 | 37,916 | 41,337 | 44,461 | 48,278 | 50,993 |
| **29** | 13,121 | 14,257 | 16,047 | 17,708 | 19,768 | 23,567 | 28,336 | 33,711 | 39,087 | 42,557 | 45,722 | 49,588 | 52,336 |
| **30** | 13,787 | 14,954 | 16,791 | 18,493 | 20,599 | 24,478 | 29,336 | 34,800 | 40,256 | 43,773 | 46,979 | 50,892 | 53,672 |
| **31** | 14,458 | 15,655 | 17,539 | 19,281 | 21,434 | 25,390 | 30,336 | 35,887 | 41,422 | 44,985 | 48,232 | 52,191 | 55,003 |
| **32** | 15,134 | 16,362 | 18,291 | 20,072 | 22,271 | 26,304 | 31,336 | 36,973 | 42,585 | 46,194 | 49,480 | 53,486 | 56,328 |
| **33** | 15,815 | 17,074 | 19,047 | 20,867 | 23,110 | 27,219 | 32,336 | 38,058 | 43,745 | 47,400 | 50,725 | 54,776 | 57,648 |
| **34** | 16,501 | 17,789 | 19,806 | 21,664 | 23,952 | 28,136 | 33,336 | 39,141 | 44,903 | 48,602 | 51,966 | 56,061 | 58,964 |
| **35** | 17,192 | 18,509 | 20,569 | 22,465 | 24,797 | 29,054 | 34,336 | 40,223 | 46,059 | 49,802 | 53,203 | 57,342 | 60,275 |
| **40** | 20,707 | 22,164 | 24,433 | 26,509 | 29,051 | 33,660 | 39,335 | 45,616 | 51,805 | 55,758 | 59,342 | 63,691 | 66,766 |
| **50** | 27,991 | 29,707 | 32,357 | 34,764 | 37,689 | 42,942 | 49,335 | 56,334 | 63,167 | 67,505 | 71,420 | 76,154 | 79,490 |
| **60** | 35,534 | 37,485 | 40,482 | 43,188 | 46,459 | 52,294 | 59,335 | 66,981 | 74,397 | 79,082 | 83,298 | 88,379 | 91,952 |
| **70** | 43,275 | 45,442 | 48,758 | 51,739 | 55,329 | 61,698 | 69,335 | 77,577 | 85,527 | 90,531 | 95,023 | 100,425 | 104,215 |
| **80** | 51,172 | 53,540 | 57,153 | 60,391 | 64,278 | 71,145 | 79,335 | 88,130 | 96,578 | 101,879 | 106,629 | 112,329 | 116,321 |
| **90** | 59,196 | 61,754 | 65,647 | 69,126 | 73,291 | 80,625 | 89,335 | 98,650 | 107,565 | 113,145 | 118,136 | 124,116 | 128,299 |
| **100** | 67,328 | 70,065 | 74,222 | 77,929 | 82,358 | 90,133 | 99,335 | 109,141 | 118,498 | 124,342 | 129,561 | 135,807 | 140,169 |