# <u>CV de VT - Um assunto recorrente em provas da ESAF</u>

Freqüentemente temos, principalmente em provas da ESAF, questões envolvendo o **Coeficiente de Variação de Variáveis Transformadas**. São dadas a Média e a Variância (ou o Desvio Padrão) da variável original e é pedido o CV da variável transformada (ou vice-versa).

Essas questões são de facílima resolução, para quem conhece bem o cálculo simplificado da Média e da Variância e/ou domina perfeitamente algumas propriedades da Média e da Variância.

Este assunto já foi abordado na aula "Importantes propriedades da Média, da Variância e do Desvio Padrão", mas ali ele foi colocado como uma das aplicações do conhecimento das propriedades. Aqui o colocaremos prioritariamente, enfatizando a necessidade de domínio e conhecimento das propriedades supracitadas. Recordemos algumas delas:

**I) <u>Quando multiplicamos ou dividimos todos os valores de uma variável (X) por uma constante (K)</u>:**

- ***A Média fica multiplicada ou dividida pela constante;***
- ***A Variância fica multiplicada ou dividida pelo quadrado da constante;***
- ***O Desvio Padrão fica multiplicado ou dividido pela constante;***

**II) <u>Quando somamos ou subtraímos uma constante (K) a todos os valores de uma variável (X)</u>:**

- ***A Média fica acrescida ou diminuída da constante;***
- ***A Variância <u>não se altera</u>;***
- ***O Desvio Padrão <u>não se altera</u>;***

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Para as outras Medidas de Posição, Moda e Mediana, ocorre a mesma situação da Média, ou seja, multiplicando ou dividindo todos os valores de uma variável (X) por uma constante (K), a Moda e a Mediana ficarão multiplicadas ou divididas pela constante. Também ao somarmos ou subtrairmos uma constante (K) a todos os valores de uma variável (X), a Moda e a Mediana ficarão acrescidas ou diminuídas dessa constante.

Recordemos ainda, que o Coeficiente de Variação é o resultado da divisão do Desvio Padrão pela Média, $CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$, e pode ser expresso na forma fracionária, na forma unitária ou na forma percentual (geralmente é expresso em percentual).

Dito isto, <u>vamos resolver um conjunto de 7 questões</u>, recentemente colocadas numa das mensagens do Grupo de Estudos Receita Federal ([http://groups.msn.com/receitafederal](http://groups.msn.com/receitafederal)):

**A Receita Federal observou que o tempo gasto para analisar 20 processos por um Auditor Fiscal está na tabela da variável transformada d = x- 42/6 a seguir:**

| **TABELA DA VARIÁVEL TRANSFORMADA *d*** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tempo em minutos** | **Processos Examinados** | **di** | **di·fi** | **$di^2 \cdot fi$** | **$di^3 \cdot fi$** | **$di^4 \cdot fi$** |
| (-3; -2] | 2 | - 2,5 | -5 | 12,5 | - 31,25 | 78,125 |
| (-2; -1] | 3 | - 1,5 | -4,5 | 6,75 | - 10,125 | 15,1875 |
| (-1; 0] | 4 | - 0,5 | - 2 | 1 | - 0,5 | 0,25 |
| (0; 1] | 6 | 0,5 | 3 | 1,5 | 0,75 | 0,375 |
| (1; 2] | 4 | 1,5 | 6 | 9 | 13,5 | 20,25 |
| (2; 3] | 1 | 2,5 | 2,5 | 6,25 | 15,625 | 39,0625 |
| **Total** | 20 | --- | --- | 37 | - 12 | 153,25 |

**Com base nessas informações julgue as questões de números 01 a 07, para a variável X.**

**1) O tempo médio para analisar tais processos, será em minutos:**

a. 41;
b. 42;
c. 43;
d. 44;
e. 45.

**RESOLUÇÃO:**

A transformação de *X* na variável *d* é dada por: $d = \frac{X-42}{6}$.

Logo, a transformação da variável *d* em *X* será dada por: X = 6d + 42.

Pelas propriedades da média, $\boxed{\overline{X} = 6\overline{d} + 42}$.

$\overline{d} = \frac{\sum di \cdot fi}{\sum fi} \Rightarrow \overline{d} = \frac{0}{20} \Rightarrow \overline{d} = 0$. Portanto, $\overline{X} = 6 \cdot 0 + 42 \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 42}$

**Gabarito: letra B.**

**2) O tempo mediano para analisar tais processos, será em minutos:**

a. 41;
b. 42;
c. 43;
d. 44;
e. 45.

**RESOLUÇÃO**:
A transformação da variável *d* em *X* será dada por: X = 6d + 42, conforme já visto anteriormente.
Pelas propriedades da Média, válidas também para a Mediana e Moda, $\boxed{Md_X = 6Md_d + 42}$.
Como a amostra tem 20 observações, a Mediana está na 4ª classe (onde estão a 10ª e a 11ª observações). A Mediana da transformada será: $Md_d = 0 + \frac{10-9}{6} \cdot 1 \Rightarrow Md_d = \frac{1}{6}$.

Logo, a Mediana de *X* será: $Md_X = 6 \cdot \frac{1}{6} + 42 \Rightarrow \boxed{Md_X = 43}$

**Gabarito: letra C.**

**3) O tempo mais incidente para analisar tais processos será em minutos:**

a. 41;
b. 42;
c. 43;
d. 44;
e. 45.

**RESOLUÇÃO:**
A transformação da variável *d* em *X* será dada por: X = 6d + 42, conforme já visto anteriormente.
Pelas propriedades da média, válidas também para a Mediana e Moda, $\boxed{Mo_X = 6Mo_d + 42}$.
A Moda está na 4ª classe (que tem a maior freqüência). Então, a Moda da transformada será: $Mo_d = 0 + \frac{2}{2+2} \cdot 1 \Rightarrow Mo_d = \frac{1}{2}$. Logo, a Moda de *X* será: $Mo_X = 6 \cdot \frac{1}{2} + 42 \Rightarrow \boxed{Mo_X = 45}$
**Gabarito: letra E.**

**4) O coeficiente de variação do tempo para analisar tais processos será em percentual:**

a. 11,90;
b. 14,29;
c. 16,67;
d. 19,04;
e. 19,43.

**RESOLUÇÃO:**

É pedido o CV da variável *X*, dado por $\boxed{CV_X = \frac{S_X}{\overline{X}}}$.

A média $\overline{X}$ já foi encontrada na 1ª questão, e é igual a 42.
Falta encontrar o Desvio Padrão da variável *X*.
A transformação da variável *d* em *X* será dada por: X = 6d + 42, conforme já visto anteriormente.
Pelas propriedades da Variância, a Variância de *X* em função da Variância da variável *d* será $\boxed{S_X^2 = 6^2 \cdot S_d^2}$.

Para encontrar a Variância *X*, antes precisamos encontrar a Variância de *d*, que será igual a:

$$S_d^2 = \frac{\sum d_i^2 \cdot f_i}{\sum fi} - \left(\frac{\sum d_i \cdot f_i}{\sum f_i}\right)^2 \Rightarrow S_d^2 = \frac{37}{20} - \left(\frac{0}{20}\right)^2 \Rightarrow S_d^2 = 1{,}85$$

Logo, a Variância de *X* será: $S_X^2 = 36 \cdot 1{,}85 \Rightarrow S_X^2 = 66{,}6 \Rightarrow S_X = \sqrt{66{,}6} \Rightarrow \boxed{S_X = 8{,}16}$.

Portanto $CV_X = \frac{8{,}16}{42} \cdot 100 \Rightarrow \boxed{CV_X = 19{,}43\%}$

**Gabarito: letra E.**

**5) O coeficiente real de assimetria do tempo para analisar tais processos será aproximadamente:**

a. – 0,24;
b. – 0,1;
c. 0;
d. 0,1;
e. 0,24.

**RESOLUÇÃO:**

Tanto pelo primeiro como pelo segundo Coeficiente de Assimetria de Pearson, a Assimetria será negativa, pois Média < Mediana < Moda. Pelo Coeficiente real (utilizando os Momentos), a Assimetria também será **negativa**, pois o somatório dos cubos dos desvios da variável transformada é negativo.

O 3º Momento é dado por: $m_3 = \frac{\sum d_i^3 \cdot f_i}{\sum f_i} \Rightarrow m_3 = \frac{-12}{20} = -0{,}6$.

O Coeficiente de Assimetria ($\sqrt{\beta_1}$), pelos Momentos, é igual a: $\sqrt{\beta_1} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$.

O 2º momento ($m_2$), dado pela Variância, já foi calculado na 4ª questão, e é igual a 1,85.

Portanto, teremos $\sqrt{\beta_1} = \frac{-0{,}6}{\sqrt{1{,}85^3}} \Rightarrow \sqrt{\beta_1} = \frac{-0{,}6}{2{,}516} \Rightarrow \sqrt{\beta_1} = -0{,}2385 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\beta_1} \cong -0{,}24}$

**Gabarito: letra A.**

**6) Assinale a opção do tipo de curtose com base nos momentos centrados:**

a. É leptocúrtica;
b. É platicúrtica;
c. É mesocúrtica;
d. É normal;
e. É indefinida do ponto de vista da intensidade da curtose.

**<u>RESOLUÇÃO</u>:**

O Coeficiente de Curtose com base nos Momentos ($\beta_2$), é dado por: $\beta_2 = \dfrac{m_4}{m_2^2}$, ou seja, é o 4º Momento dividido pelo quadrado da Variância (2º Momento).

O 4º Momento é dado por $m_4 = \dfrac{\sum d_i^4 \cdot f_i}{\sum f_i} \Rightarrow m_4 = \dfrac{153{,}25}{20} = 7{,}6625$.

O 2º momento ($m_2$), dado pela Variância, já foi calculado na 4ª questão, e é igual a 1,85.

Portanto, teremos $\beta_2 = \dfrac{7{,}6625}{1{,}85^2} \Rightarrow \beta_2 = \dfrac{7{,}6625}{3{,}4225} \Rightarrow \beta_2 = 2{,}2389$.

Como $\boxed{\beta_2 < 3}$, a distribuição é **Platicúrtica**.
**<u>Gabarito</u>: letra B.**

**7) Assinale a opção que corresponde ao percentual de processos analisados no máximo em 47 minutos (valor da variável X).**

a. 62,5;
b. 65;
c. 67,5;
d. 70;
e. 72,5.

**<u>RESOLUÇÃO</u>:**

A transformação de *X* na variável *d* é dada por: $d = \dfrac{X - 42}{6}$.

Logo para X = 47, teremos: $d = \dfrac{47 - 42}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Caímos então numa questão de Interpolação Linear. A fração 5/6 está compreendida no intervalo (0; 1], o qual tem uma freqüência absoluta de 6. Para encontrarmos a freqüência procurada (que vamos denominar por *fp*) correspondente ao valor 5/6, temos que armar a seguinte proporção: uma amplitude de 1 (1 – 0) está para uma freqüência de 6, assim como uma amplitude de 5/6 (5/6 – 0) está para a fp.

Assim, temos: $\dfrac{1}{6} = \dfrac{5/6}{fp} \Rightarrow fp = 6 \cdot \dfrac{5}{6} \Rightarrow fp = 5.$

Como é pedido o tempo máximo de 47 minutos, a freqüência dos intervalos anteriores, correspondentes a valores de X menores do que 47 minutos (inferiores a 5/6 nos valores da variável *d*, que é a variável *X* transformada), nos interessam também.
Assim temos: 2 (freqüência da 1ª classe) + 3 (freqüência da 2ª classe) + 4 (freqüência da 3ª classe) + 5 (freqüência interpolada na 4ª classe) = 14, que é a freqüência de processos com tempo máximo de 47 minutos. Se o total de processos é igual a 20, então 14/20 = **70%**.
**<u>Gabarito</u>: letra D.**

Vamos resolver agora quatro questões de concursos, algumas das quais já foram resolvidas na aula anterior, sobre "Importantes propriedades da Média, da Variância e do Desvio Padrão", mas dada a relevância do assunto, vamos resolvê-las novamente.

**8) [ESAF-Oficial de Justiça Avaliador TJ-CE-2002] Aplicando a transformação z = (x – 14)/4 aos pontos médios das classes (x) obteve-se o desvio padrão de 1,10 salários mínimos. Assinale a opção que corresponde ao desvio padrão dos salários não transformados.**

(a) 6,20
(b) 4,40
(c) 5,00
(d) 7,20
(e) 3,90

**<u>RESOLUÇÃO</u>:**
Essa questão fez parte de um bloco de 5 questões dadas com base numa tabela de dados agrupados em classes, mas não há necessidade de reproduzirmos aqui a tabela, pois para resolvê-la, basta sabermos fazer a transformação inversa, da variável Z para a variável X, que será dada por: $\boxed{X = 4Z + 14}$. Pelas propriedades do Desvio Padrão: $\boxed{S_X = 4 \cdot S_Z}$.
Foi dado o Desvio Padrão da variável transformada, $S_Z = 1{,}10$, então: $S_X = 4 \cdot 1{,}10 \Rightarrow \boxed{S_X = 4{,}40}$
**<u>Gabarito</u>: letra B.**

**9) [ESAF-Fiscal de Tributos Estaduais-SEFA-PA-2002] Um certo atributo W, medido em unidades apropriadas, tem média amostral 5 e desvio-padrão unitário. Assinale a opção que corresponde ao coeficiente de variação, para a mesma amostra, do atributo Y = 5 + 5W.**

(a) 16,7%
(b) 20,0%
(c) 55,0%
(d) 50,8%
(e) 70,2%

**<u>RESOLUÇÃO</u>:**
São dados na questão: $\overline{W} = 5$ e $S_W = 1$.
A transformação dada é: Y = 5 + 5W e pede-se o Coeficiente de Variação de Y:
Pelas propriedades da Média: $\overline{Y} = 5 + 5 \cdot \overline{W} \Rightarrow \overline{Y} = 5 + 5 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{\overline{Y} = 30}$;
Pelas propriedades do Desvio Padrão: $S_Y = 5 \cdot S_W \Rightarrow S_Y = 5 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{S_Y = 5}$;

Logo: $CV_Y = \dfrac{5}{30} \Rightarrow CV_Y = \dfrac{1}{6}$ = 0,1666... $\cong$ 16,7%.
**<u>Gabarito</u>: letra A.**

**10) [ESAF-AFRF-2000] Numa amostra de tamanho 20 de uma população de contas a receber, representadas genericamente por X, foram determinadas a média amostral M = 100 e o desvio padrão S = 13 da variável transformada (X-200)/5. Assinale a opção que dá o coeficiente de variação amostral de X.**

(a) 3,0%
(b) 9,3%
(c) 17,0%
(d) 17,3%
(e) 10,0%

**<u>RESOLUÇÃO</u>:**
Denominemos por *Z* a variável transformada, então $Z = \dfrac{X - 200}{5}$. Para voltarmos à variável X, teremos que fazer: 5Z = X – 200 $\Rightarrow$ X = 5Z + 200.
O enunciado da questão fornece a média e a variância da variável transformada, ou seja, $\boxed{M = \overline{Z} = 100}$ e $\boxed{S = S_Z = 13}$.
Mas é pedido o Coeficiente de Variação da variável *X*. Precisamos, então, encontrar $\overline{X}$ e $S_X$.
Utilizando as propriedades da Média, teremos:
$\overline{X} = 5 \cdot \overline{Z} + 200 \Rightarrow \overline{X} = 5 \cdot 100 + 200 \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 700}$
Utilizando as propriedades do Desvio Padrão, teremos:
$S_X = 5 \cdot S_Z \Rightarrow S_X = 5 \cdot 13 \Rightarrow \boxed{S_X = 65}$

Logo: $CV_X = \dfrac{65}{700} \Rightarrow CV_X = 0{,}0928 \cong 9{,}3\%$.
**<u>Gabarito</u>: letra B.**

**11) [ESAF-AFRF-2003] O atributo Z = (X – 2)/3 tem média amostral 20 e variância amostral 2,56. Assinale a opção que corresponde ao coeficiente de variação amostral de X.**

(a) 12,9%
(b) 50,1%
(c) 7,7%
(d) 31,2%
(e) 10,0%

**<u>RESOLUÇÃO</u>:**
São fornecidas: a Média e a Variância amostrais de Z, respectivamente iguais a: $\overline{Z} = 20$ e $S_Z^2 = 2{,}56$.
Mas, para encontrar o CV de X, precisamos da Média e do Desvio Padrão de X. Para facilitar, vamos calcular o Desvio Padrão da variável Z. Assim, $S_Z = \sqrt{S_Z^2} \Rightarrow S_Z = \sqrt{2{,}56} \Rightarrow S_Z = 1{,}6$.

A transformação de X em Z é dada por: $Z = \dfrac{X-2}{3}$. Logo, para transformarmos Z em X faremos:

$3Z = X - 2 \Rightarrow \boxed{X = 3Z + 2}$.
Pelas propriedades da Média:
$\overline{X} = 3 \cdot \overline{Z} + 2 \Rightarrow \overline{X} = 3 \cdot 20 + 2 \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 62}$
Pelas propriedades do Desvio Padrão:
$S_X = 3 \cdot S_Z \Rightarrow S_X = 3 \cdot 1{,}6 \Rightarrow \boxed{S_X = 4{,}8}$

Logo: $CV_X = \dfrac{4{,}8}{62} \Rightarrow CV_X = 0{,}0774 \cong 7{,}7\%$.
**<u>Gabarito</u>: letra C.**

Repare na semelhança dessas duas últimas questões (AFRF-2000 e AFRF-2003):
Na questão do AFRF-2000 a variável transformada é $\dfrac{X-200}{5}$ e são dados os valores da Média e do Desvio Padrão da variável transformada;
Na questão do AFRF-2003 a variável transformada é $\dfrac{X-2}{3}$ e são dados os valores da Média e da Variância da variável transformada;

Quem soube resolver a questão do AFRF-2000 e fez a prova de 2003, com certeza garantiu o ponto da questão similar. Como pudemos ver, dominando as propriedades, este tipo de questão fica extremamente fácil, <u>É PONTO GARANTIDO</u>.