<u>Importantes propriedades da Média, da Variância e do Desvio Padrão:</u>

É importantíssimo o perfeito conhecimento de algumas propriedades da Média, da Variância e do Desvio Padrão para resolver, com facilidade, questões envolvendo Variável Transformada (assunto freqüentemente cobrado em provas da ESAF) e poder calcular, de maneira muito mais rápida, a média de uma distribuição de freqüência, quando os números envolvidos são grandes, pelo Processo Simplificado de Cálculo da Média, usando uma variável reduzida.

Antes de vermos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades em questões de provas, vamos relacioná-las. Das propriedades existentes para as medidas supracitadas, <u>as mais importantes</u> são:

<u>PARA A MÉDIA</u>:

I) Quando multiplicamos ou dividimos todos os valores de uma variável (X) por uma constante (k), a sua MÉDIA fica multiplicada ou dividida pela constante.

<u>Explicando</u>: Denominemos por Z a variável definida como sendo a variável X multiplicada ou dividida pela constante, ou seja, $Z = X \cdot k$ ou $Z = \frac{X}{k}$, logo: $\boxed{\overline{Z} = \overline{X} \cdot k}$ ou $\boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{X}}{k}}$.

Para provar a veracidade dessa propriedade, arbitre três ou quatro valores para X e calcule a sua média. Por exemplo: **7**, **8** e **12**. A média dessas três observações é 9, certo?

Agora multiplique essas três observações por uma constante, por exemplo, k = 4.

Os valores para a nossa variável Z definida como sendo o quádruplo de X, ou seja Z = 4X, serão: 28, 32 e 48.

A média desses três valores será: (28 + 32 + 48)/3 = 108/3 = 36.

Usando a propriedade: $\overline{Z} = 9 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{\overline{Z} = 36}$ **c.q.d.** (<u>como queríamos demonstrar</u>).

Para qualquer série de valores (não importa quantas observações contenha), essa propriedade sempre se verificará.

Crie outra série, arbitrando outros valores (pode ser com mais de três observações) use outra constante e verifique. Teste a propriedade também para a divisão, mas lembre-se que para demonstrar essa propriedade para a divisão, pode dar um pouco mais de trabalho dependendo dos valores envolvidos e da constante escolhida, pois poderá resultar em valores decimais ou dízimas periódicas.

II) Quando somamos ou subtraímos uma constante (k) a todos os valores de uma variável (X), a sua MÉDIA fica acrescida ou diminuída dessa constante.

<u>Explicando</u>: Seja Z a variável definida como sendo a variável X acrescida ou diminuída da constante, então $Z = X + k$ ou $Z = X - k$, logo: $\boxed{\overline{Z} = \overline{X} + k}$ ou $\boxed{\overline{Z} = \overline{X} - k}$.

Para provar a veracidade dessa propriedade, arbitre três ou quatro valores para X e calcule a sua média. Use os mesmos valores do exemplo anterior: **7**, **8** e **12**, cuja média é 9 e some uma constante, por exemplo, k = 11.

Os valores para a nossa variável Z definida como sendo X + 11, ou seja, Z = X + 11, serão, respectivamente: 18, 19 e 23.

A média desses três valores será: (18 + 19 + 23)/3 = 60/3 = 20.

Usando a propriedade: $\overline{Z} = 9 + 11 \Rightarrow \boxed{\overline{Z} = 20}$ **c.q.d.**

Vejamos agora para a subtração, definindo Z como sendo X – 11, ou seja, Z = X – 11, teremos, respectivamente –4, –3 e 1, cuja média será: [(–4) + (–3) + 1]/3 = (–6)/3 = –2.

Usando a propriedade: $\overline{Z} = 9 - 11 \Rightarrow \boxed{\overline{Z} = -2}$ **c.q.d.**

Igualmente, para qualquer série de valores (não importando o número de observações), essa propriedade sempre se verificará.

Crie outra série, arbitrando outros valores, use outra constante e verifique a propriedade para a soma ou subtração.

<u>OBSERVAÇÃO IMPORTANTE</u>: As duas propriedades supracitadas para a Média <u>valem também</u> para a **Moda** e para a **Mediana**.

<u>PARA A VARIÂNCIA</u>:

III) Quando multiplicamos ou dividimos todos os valores de uma variável (X) por uma constante (k), a sua VARIÂNCIA fica multiplicada ou dividida pelo QUADRADO da constante.

<u>Explicando</u>: Seja Z a variável definida como sendo a variável X multiplicada ou dividida pela constante, então $Z = X \cdot k$ ou $Z = \frac{X}{k}$, logo: $\boxed{\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 \cdot k^2}$ ou $\boxed{\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_X^2}{k^2}}$.

Para provar a veracidade dessa propriedade, arbitre três ou quatro valores para X e calcule a sua variância. Por exemplo: **4**, **5**, **6** e **9**.

Use a fórmula da variância populacional $\sigma^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}\right\}$ e encontrará uma variância de 3,5.

Agora multiplique essas quatro observações por uma constante, por exemplo, k = 2.
Os valores para a nossa variável Z definida como sendo o dobro de X, ou seja, Z = 2X, serão: 8, 10, 12 e 18.
A variância desses quatro valores será: (632 - 576)/4 = 56/4 = 14.

Usando a propriedade: $\sigma_Z^2 = 3{,}5 \cdot 2^2 \Rightarrow \sigma_Z^2 = 3{,}5 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{\sigma_Z^2 = 14}$ **c.q.d.**

Essa propriedade também sempre se verificará para qualquer série de valores.
Crie outra série, arbitre outros valores e outra constante. Teste a propriedade também para a divisão, lembrando que para a divisão pode ser mais trabalhoso, pois dependendo dos valores envolvidos e da constante escolhida, poderemos ter valores decimais ou dízimas periódicas.

IV) Quando somamos ou subtraímos uma constante (k) a todos os valores de uma variável (X), a sua VARIÂNCIA fica INALTERADA, pois a variância de uma constante é igual a zero.

Explicando: Seja Z a variável definida como sendo a variável X acrescida ou diminuída da constante, então $Z = X + k$ ou $Z = X - k$.

Assim, $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_k^2$ ou $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 - \sigma_k^2$. Mas, $\boxed{\sigma_k^2 = 0}$, logo $\boxed{\sigma_Z^2 = \sigma_X^2}$

Para provar a veracidade dessa propriedade, usaremos o exemplo anterior: **4**, **5**, **6** e **9**, cuja variância é de 3,5.
Agora some uma constante, por exemplo, k = 8.
Os valores para a variável Z definida como sendo X + 8 (Z = X + 8) serão, respectivamente: 12, 13, 14 e 17.

A variância desses quatro valores será: (798 – 784)/4 = 14/4 = 3,5. Ou seja, $\boxed{\sigma_Z^2 = \sigma_X^2}$ **c.q.d.**

Subtraindo a mesma constante, então os valores da variável Z definida como sendo X – 8, ou seja Z = X – 8, serão, respectivamente: –4, –3, –2 e 1.

A variância desses quatro valores será: (30 – 16)/4 = 14/4 = 3,5. Ou seja, $\boxed{\sigma_Z^2 = \sigma_X^2}$ **c.q.d.**

<u>PARA O DESVIO PADRÃO</u>:

V) Quando multiplicamos ou dividimos todos os valores de uma variável (X) por uma constante (k), o seu DESVIO PADRÃO fica multiplicado ou dividido pela constante.

Explicando: Seja Z a variável definida como sendo a variável X multiplicada ou dividida pela constante, então $Z = X \cdot k$ ou $Z = \frac{X}{k}$, logo: $\boxed{\sigma_Z = \sigma_X \cdot k}$ ou $\boxed{\sigma_Z = \frac{\sigma_X}{k}}$.

Usando o mesmo exemplo anterior, para as observações de X iguais a: **4**, **5**, **6** e **9**, teremos como desvio padrão a raiz quadrada de 3,5 que é igual a 1,871 aproximadamente.
Agora multiplique essas quatro observações por uma constante, por exemplo k = 2.
Os valores para a variável Z definida como sendo o do dobro de X, ou seja, Z = 2X, serão: 8, 10, 12 e 18.
Vimos, no item III, que a variância para esses valores será igual a 14, cuja raiz quadrada é igual a aproximadamente 3,742.

Usando a propriedade: $\sigma_Z = 1{,}871 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{\sigma_Z = 3{,}742}$ **c.q.d.**

VI) Quando somamos ou subtraímos uma constante (k) a todos os valores de uma variável (X), o seu DESVIO PADRÃO fica INALTERADO, pois o desvio padrão de uma constante é igual a zero.

Explicando: Seja Z a variável definida como sendo a variável X acrescida ou diminuída da constante, então $Z = X + k$ ou $Z = X - k$.

Assim, $\sigma_Z = \sigma_X + \sigma_k$ ou $\sigma_Z = \sigma_X - \sigma_k$. Mas, $\boxed{\sigma_k = 0}$, logo $\boxed{\sigma_Z = \sigma_X}$

Basta raciocinar com o exemplo do item IV em termos de desvio padrão (raiz quadrada da variância) e ver que essa propriedade também se verifica.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DAS PROPRIEDADES EM QUESTÕES DE CONCURSOS ENVOLVENDO VARIÁVEIS TRANSFORMADAS:

1) Questão da prova do AFRF-2000 (Resolução comentada na pagina 94 do livro ESTATÍSTICA-ESAF)

Numa amostra de tamanho 20 de uma população de contas a receber, representadas genericamente por X, foram determinadas a média amostral M = 100 e o desvio-padrão S = 13 da variável transformada (X–200)/5. Assinale a opção que dá o coeficiente de variação amostral de X.

a) 3,0%
b) 9,3%
c) 17,0%
d) 17,3%
e) 10,0%

O coeficiente de variação é fornecido pelo resultado da divisão do desvio padrão pela média, ou seja: $\boxed{CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}}$.

Se quiséssemos encontrar o CV da variável transformada, bastaria dividir 13 por 100, encontrando 13%. Mas repare que, para encontrar o Coeficiente de Variação de X precisaremos encontrar o desvio padrão e a média de X. Podemos batizar como Z a variável transformada, assim, $Z = \frac{X - 200}{5}$.
Essa é a função que transforma a variável X na variável Z, cuja média (100) é dada, assim como o seu desvio padrão (13). Multiplicando Z pelo denominador da fração oposta pela igualdade e trocando –200 de lado e de sinal, obteremos a função que transforma a variável Z na variável X dada por: **X = 5Z + 200.**

Pelas propriedades da média, sabemos que quando uma variável é multiplicada ou dividida por uma constante sua média fica multiplicada ou dividida pela constante (**PROPRIEDADE I**) e que quando é somada ou subtraída uma constante, sua média fica somada ou subtraída dessa constante (**PROPRIEDADE II**).

Portanto: $\overline{X} = 5 \cdot \overline{Z} + 200$. Mas $\overline{Z} = 100$. Logo: $\overline{X} = 5 \cdot 100 + 200 \Rightarrow \overline{X} = 500 + 200 \Rightarrow \overline{X} = 700$.

Pelas propriedades do desvio padrão, sabemos que, quando uma variável é multiplicada ou dividida por uma constante o seu desvio padrão fica multiplicado ou dividido pela constante (**PROPRIEDADE V**) e que quando é somada ou subtraída uma constante, o seu desvio padrão não se altera, pois a variância de uma constante é zero (**PROPRIEDADE VI**).

Portanto: $S_X = 5 \cdot S_Z$. Mas $S_Z = 13$. Logo: $S_X = 5 \cdot 13 \Rightarrow S_X = 65$.

Já temos o desvio padrão e a média de X, assim podemos calcular o CV de X, que na forma percentual será:
CV = $\frac{65}{700} \cdot 100 \Rightarrow$ CV = $\frac{65}{7} \Rightarrow$ **CV ≅ 9,3%**.
Gabarito oficial: B

2) Questão da prova do AFRF-2003 (Resolução comentada na pagina 5 do livro ESTATÍSTICA-ESAF)

O atributo Z = (X–2)/3 tem média amostral 20 e variância amostral 2,56. Assinale a opção que corresponde ao coeficiente de variação amostral de X.

a) 12,9%
b) 50,1%
c) 7,7%
d) 31,2%
e) 10,0%

Note a semelhança entre esta questão e a questão anterior. A forma de resolução é a mesma. Vejamos:

O coeficiente de variação é fornecido pelo resultado da divisão do desvio padrão pela média, ou seja: $\boxed{CV = \dfrac{\sigma}{\overline{X}}}$.

No enunciado, são fornecidas a média (20) e a variância (2,56) para a variável transformada $Z = \dfrac{X-2}{3}$.

Para encontrarmos o valor da variável X a partir da variável Z, deveremos fazer: 3Z = X – 2 ⇒ **X = 3Z + 2**.

Pelas propriedades da média, sabemos que quando uma variável é multiplicada ou dividida por uma constante, sua média fica multiplicada ou dividida pela constante (**PROPRIEDADE I**) e que quando é somada ou subtraída uma constante, sua média fica somada ou subtraída dessa constante (**PROPRIEDADE II**). Assim, teremos que: $\overline{X} = 3 \cdot \overline{Z} + 2$. Logo: $\overline{X} = 3 \cdot 20 + 2 \Rightarrow \overline{X} = 60 + 2 \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 62}$.

A variância, dada pelo enunciado, é de 2,56. Fica mais fácil usarmos o desvio padrão, que será a raiz quadrada positiva de 2,56 e que é igual a 1,6.

Pelas propriedades do D.P., sabemos que quando uma variável é multiplicada ou dividida por uma constante, o seu desvio padrão fica multiplicado ou dividido pela constante (**PROPRIEDADE V**) e que quando é somada ou subtraída uma constante, o seu desvio padrão não se altera, pois o desvio padrão de uma constante é zero (**PROPRIEDADE VI**).

Logo, o desvio padrão de X será: $S_X = 3 \cdot S_Z \Rightarrow S_X = 3 \cdot 1{,}6 \Rightarrow \boxed{S_X = 4{,}8}$.

O coeficiente de variação de X, na forma percentual, será:

$CV_X = \dfrac{S_X}{\overline{X}} \cdot 100 \Rightarrow CV_X = \dfrac{4{,}8}{62} \cdot 100 \Rightarrow CV_X = 7{,}7419\% \Rightarrow$ **$CV_X \cong$ 7,7%**.

Gabarito oficial: C

3) Questão da prova de Fiscal de Tributos Estaduais – SEFA-PA-2002
(Resolução a incluir em futura edição do livro ESTATÍSTICA-ESAF)

Um certo atributo W, medido em unidades apropriadas, tem média amostral 5 e desvio-padrão unitário. Assinale a opção que corresponde ao coeficiente de variação, para a mesma amostra, do atributo Y = 5 + 5W.

a) 16,7%
b) 20,0%
c) 55,0%
d) 50,8%
e) 70,2%

Sabemos que o CV = $\dfrac{\sigma}{\overline{X}}$, ou seja, o desvio padrão dividido pela média.

Queremos o CV da variável Y definida por Y = 5 + 5W. Logo: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\overline{Y}}$

Temos $\overline{W} = 5$ (média de W) e $\sigma_W = 1$ (desvio padrão de W);

Pelas propriedades da média, quando uma variável é multiplicada por uma constante, sua média fica multiplicada pela constante (**PROPRIEDADE I**) e quando é acrescida de uma constante sua média também fica acrescida da constante (**PROPRIEDADE II**).
Logo, $\overline{Y} = 5 + 5\overline{W} \Rightarrow \overline{Y} = 5 + 5 \cdot 5 \Rightarrow \overline{Y} = 5 + 25 \Rightarrow \boxed{\overline{Y} = 30}$

Pelas propriedades do desvio padrão, quando uma variável é multiplicada por uma constante, seu desvio padrão fica multiplicado pela constante (**PROPRIEDADE V**), mas quando é acrescida de uma constante o seu desvio padrão não se altera, pois o desvio padrão de uma constante é igual a zero (**PROPRIEDADE VI**).
Logo, $\sigma_Y = 5 \cdot \sigma_W \Rightarrow \sigma_Y = 5 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{\sigma_Y = 5}$

Assim o CV de Y será:

$$CV_y = \frac{5}{30} \Rightarrow CV_y = \frac{1}{6} \Rightarrow CV_y = 0{,}1666\ldots \cdot 100 \Rightarrow \mathbf{CV_y \cong 16{,}7\%}$$

Gabarito oficial: A

4) Questão da prova para Assessor Especializado do IPEA-2004
(Não será incluída no livro, pois a prova não foi elaborada pela ESAF, mas pela Fundação Carlos Chagas)

A variável X tem média 4 e variância 2. Considere as variáveis:

Y = 3X, Z = X + 5, U = –3X + 1, V = X – 5 e W = Y – 5

É verdade que:

a) W tem média 7 e variância 3.
b) Z tem média 9 e coeficiente de variação $\sqrt{2}$.
c) os coeficientes de variação de Y e de U são iguais.
d) os desvios-padrão de U e Y são iguais.
e) se a distribuição de freqüências de X tem assimetria positiva, a média de V é maior do que zero.

São fornecidas para a variável X as seguintes informações: $\overline{X} = 4$; $\sigma^2 = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$

Utilizando as propriedades que vimos anteriormente podemos calcular, para cada uma das variáveis descritas, a média, a variância e o desvio padrão e com isso verificar, de todas as alternativas, qual a alternativa correta. Observar ainda que, para algumas das variáveis, devemos considerar o valor absoluto da média para efeito de cálculo do Coeficiente de Variação (não existe CV negativo, assim como o desvio padrão), pois o CV também pode ser definido como a raiz positiva da Variância Relativa, dada como sendo o resultado da divisão da variância pelo quadrado da média, ou seja:

$$CV = \sqrt{VR} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\left(\overline{X}\right)^2}} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

VARIÁVEL	Y	Z	U	V	W
MÉDIA	12	9	–11	–1	7
VARIÂNCIA	18	2	18	2	18
DESVIO PADRÃO	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\boxed{3\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
VARIÂNCIA RELATIVA	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{18}{121}$	2	$\frac{18}{49}$
COEFICIENTE DE VARIAÇÃO	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{9}$	$\frac{3\sqrt{2}}{11}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{7}$

Observando o quadro acima vemos que, das alternativas de resposta, a única correta é a que diz que os desvios-padrão de U e de Y são iguais.
Gabarito oficial: D