## ***MEDIDAS DE POSIÇÃO*:**

São medidas que possibilitam representar resumidamente um conjunto de dados relativos à observação de um determinado fenômeno, pois orientam quanto à posição da distribuição no eixo dos X, permitindo a comparação das séries de dados entre si pelo confronto desses números. As principais medidas de posição (chamadas também de Medidas de Tendência Central) são a MÉDIA, a MEDIANA e a MODA. Mas temos também os Decis, Quartis e Percentis.

A Média, também chamada de Esperança, Esperança Matemática, Valor Esperado ou, ainda, Expectância de uma Variável Aleatória, pode ser:

$$\text{MÉDIA} \begin{cases} \text{Aritmética} \begin{cases} \text{Simples} \\ \text{Ponderada} \end{cases} \\ \text{Geométrica} \\ \text{Harmônica} \end{cases}$$

***I)*** ***<u>Média Aritmética Simples</u>***: Quando se tratar de <u>dados isolados</u>, a média $\overline{\mathbf{X}}$ será a soma de todos os valores ($X_i$) observados dividida pelo número de observações, ou seja:

$$\boxed{\overline{\mathbf{X}} = \frac{\sum X_i}{n}}$$

<u>Onde</u>: $\sum X_i$ = soma dos valores observados
n = número de observações

<u>Exemplo</u>: Determinar a Média Aritmética Simples do seguinte conjunto de valores: **7**, **9**, **10**, **14**, **15** e **17**

$$\Rightarrow \overline{\mathbf{X}} = \frac{7+9+10+14+15+17}{6} \Rightarrow \overline{\mathbf{X}} = \frac{72}{6} \Rightarrow \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{12}$$

Quando se tratar de <u>dados agrupados</u>, a média $\overline{\mathbf{X}}$ será a soma do produto dos valores observados pela freqüência absoluta com que estes ocorrem, dividida pela soma das freqüências absolutas da distribuição, ou seja:

$$\boxed{\overline{\mathbf{X}} = \frac{\sum X_i \cdot F_i}{\sum F_i}}$$

<u>Onde</u>: $\sum X_i \cdot F_i$ = soma dos produtos de cada valor observado pela sua respectiva freqüência absoluta

$\sum F_i$ **=** soma das freqüências absolutas

<u>Exemplo</u>: Dada a distribuição a seguir:

| $\mathbf{X_i}$ | **9** | **10** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{F_i}$ | 1 | 3 | 5 | 1 |

$$\Rightarrow \sum X_i \cdot F_i = 9 + 30 + 70 + 15 \quad \text{e} \quad \sum F_i = 10 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{X}} = \frac{124}{10} = \mathbf{12{,}4}$$

*<u>OBS.</u>*: Se os dados estiverem agrupados em intervalos de classe, deve-se considerar como $\mathbf{X_i}$ o ponto médio do intervalo de classe.

***II)*** ***<u>Média Aritmética Ponderada</u>***: Quando as observações tiverem <u>pesos</u> diferentes, esses pesos terão influência sobre a média. Assemelha-se ao cálculo da média aritmética simples para dados agrupados, bastando que troquemos as freqüências pelos pesos. Então:

$$\boxed{\mathbf{Mp} = \frac{\sum X_i \cdot P_i}{\sum P_i}}$$

<u>Onde</u>: $\sum X_i \cdot P_i$ = soma dos produtos de cada valor observado pelo seu respectivo peso

$\sum P_i$ **=** soma dos pesos

<u>Exemplo</u>: Numa prova para Auditor Fiscal, temos que a prova P.1 (Conhecimentos Gerais) tem <u>peso 1</u>, as provas P.2 (Conhecimentos Específicos) e P.3 (Conhecimentos Especializados por área) têm <u>peso 2</u>. Supondo que um candidato tenha acertado:

55% da prova P.1
75% da prova P.2
80% da prova P.3
Pela Média Aritmética simples, teríamos (55 + 75 + 80)/3 = **70**% de acertos em média.

Usando a <u>Média Aritmética Ponderada</u>, teremos:

$$\frac{(55 \cdot 1) + (75 \cdot 2) + (80 \cdot 2)}{1 + 2 + 2} = \frac{365}{5} = \mathbf{73}\%$$

No exemplo acima, vimos que a M.A.P. foi maior do que a M.A.S., porque houve um maior percentual de acertos nas matérias de maior peso. Caso contrário, a M.A.P. seria menor do que a M.A.S. Podemos concluir, então, que a M.A.P. é diretamente influenciada pelos pesos.

***III)*** ***<u>Média Geométrica (Mg)</u>***: A Média Geométrica de um conjunto de **n** valores observados $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, ... $\mathbf{X_n}$ é a raiz de ordem **n** do produto desses valores, ou seja:

$$\boxed{\mathbf{Mg} = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot ...X_n}}$$

Onde: $X_i$ = Valor observado de ordem i
n = número de observações

No exemplo anterior, a **Mg** seria: $\sqrt[3]{55 \cdot 75 \cdot 80} = \sqrt[3]{330.000} \cong \mathbf{69,10}$

A Média Geométrica é bem menos usada que a Média Aritmética, pois para um número grande de observações apresenta a desvantagem de ter um processo de cálculo muito longo e trabalhoso.

***IV)*** ***<u>Média Harmônica (Mh)</u>***: A Média Harmônica de um conjunto de **n** valores observados $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, ... $\mathbf{X_n}$ será o resultado da divisão da quantidade **n** de elementos do conjunto pelo somatório dos inversos dos valores observados, ou seja:

$$\boxed{\mathbf{Mh} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}}}$$

<u>Onde</u>: $\sum \frac{1}{X_i}$ = soma dos inversos dos valores observados
n = número de observações

No exemplo anterior, a **Mh** seria:

$$\frac{3}{\frac{1}{55}+\frac{1}{75}+\frac{1}{80}} = \frac{3}{\frac{240+176+165}{13.200}} = 3\cdot\frac{13.200}{581} \cong \mathbf{68{,}16}$$

Pelo mesmo motivo da Média Geométrica, a Média Harmônica também é pouco usada.

**OBS.**: <u>Relação entre as Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica</u> → A Média Geométrica de um conjunto de números positivos $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, ... $\mathbf{X_n}$ é maior ou igual à Média Harmônica e menor ou igual à Média Aritmética, ou seja:

$$\boxed{\mathbf{Mh \le Mg \le \overline{X}}}$$

Com efeito, no exemplo dado (notas de um candidato a Auditor Fiscal), temos que:

$$\boxed{\mathbf{68{,}16}\ (\mathbf{Mh}) \le \mathbf{69{,}10}\ (\mathbf{Mg}) \le \mathbf{70{,}0}\ (\overline{\mathbf{X}})}$$

## ***PROPRIEDADES DA MÉDIA:***

**1)** A média de uma constante é a própria constante.

$$\boxed{\overline{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{\Sigma K}}{\mathbf{n}} = \mathbf{K}}$$

**2)** Multiplicando uma Variável Aleatória X por uma constante, sua média ficará multiplicada por essa constante.

$$\boxed{\overline{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{\Sigma X_i}}{\mathbf{n}} \Rightarrow \frac{\mathbf{\Sigma KX_i}}{\mathbf{n}} = \mathbf{K}\overline{\mathbf{X}}}$$

**3)** A média da soma ou diferença de 2 Variáveis Aleatórias é a soma ou diferença das médias.

$$\boxed{\overline{\mathbf{X \pm Y}} = \overline{\mathbf{X}} \pm \overline{\mathbf{Y}}}$$

**4)** Somando ou subtraindo uma constante a uma V.A., a sua média ficará somada ou subtraída da mesma constante.

$$\boxed{\overline{\mathbf{X \pm K}} = \overline{\mathbf{X}} \pm \mathbf{K}}$$

**5)** A média do produto de 2 Variáveis Aleatórias independentes é o produto das médias.

$$\boxed{\overline{\mathbf{XY}} = \overline{\mathbf{X}} \cdot \overline{\mathbf{Y}}}$$

## *CÁLCULO SIMPLIFICADO DA MÉDIA:*

Tal procedimento é particularmente útil de ser aplicado quando os valores observados forem grandes e a amplitude entre tais valores for constante, pois o cálculo simplificado reduz a magnitude das operações, facilitando o cálculo.

Exemplo: Caso tivéssemos a seguinte distribuição:

| $X_i$ | **17** | **19** | **21** | **23** | **25** |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_i$ | 8 | 12 | 15 | 7 | 5 |

O cálculo da média pelo processo normal seria:

| $X_i$ | $F_i$ | $X_i \cdot F_i$ |
|---|---|---|
| 17 | 8 | 136 |
| 19 | 12 | 228 |
| 21 | 15 | 315 |
| 23 | 7 | 161 |
| 25 | 5 | 125 |
| **Σ** | 47 | 965 |

$$\overline{X} = \frac{965}{47} = 20{,}53$$

Obteremos este mesmo resultado, pelo cálculo simplificado da média, criando uma variável $\mathbf{Z_i}$ e arbitrando um valor zero (de preferência no valor ou na classe do meio ou próxima do meio). Os valores de $\mathbf{Z_i}$ localizados na tabela acima desse zero serão **-1**, **-2**, ...,**-n** e os valores localizados abaixo serão **1**, **2**, ...,**n**. A seguir, multiplicaremos os valores $\mathbf{Z_i}$ pelas respectivas freqüências a fim de obter a média $\overline{\mathbf{Z}} = \dfrac{\Sigma \mathbf{Z_i F_i}}{\Sigma \mathbf{F_i}}$.

Assim , no exemplo dado, teremos:

| $X_i$ | $F_i$ | $Z_i$ | $Z_i \cdot F_i$ |
|---|---|---|---|
| 17 | 8 | -2 | -16 |
| 19 | 12 | -1 | -12 |
| 21 | 15 | **0** | 0 |
| 23 | 7 | 1 | 7 |
| 25 | 5 | 2 | 10 |
| **Σ** | 47 | | -11 |

$$\overline{Z} = -\frac{11}{47} = -0{,}23404$$

Para voltarmos à variável **X** e encontrarmos $\overline{\mathbf{X}}$, usaremos a fórmula:

$$\boxed{\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{h} \cdot \overline{\mathbf{Z}} + \mathbf{X_o}}$$

Onde: **h** = amplitude entre os valores ou a amplitude dos intervalos de classe
$\overline{\mathbf{Z}}$ = média da variável $\mathbf{Z_i}$
$\mathbf{X_o}$ = valor da variável $\mathbf{X_i}$ ou o ponto médio do intervalo de classe onde arbitramos $\mathbf{Z_i} = 0$

No exemplo dado, **h** = 2 e $\mathbf{X_o}$ = 21. Então, teremos:

$\overline{\mathbf{X}}$ = 2 · (-0,23404) + 21 = -0,46808 + 21 ≅ **20,53**→ (mesmo valor encontrado pelo cálculo anterior)

*V)* ***Moda***: É o valor que mais aparece ou o de maior freqüência simples (absoluta ou relativa) numa distribuição de freqüência. A Moda pode não existir; existindo, pode não ser única. Uma distribuição pode ser: Amodal (não há Moda – todas os valores observados aparecem o mesmo número de vezes), Unimodal (uma só Moda), Bimodal (quando tem duas Modas) ou Multimodal (tem várias Modas).

Exemplo: Notas dos alunos de uma turma:

| **Nota ($X_i$)** | **$F_i$** |
|---|---|
| **0** | 0 |
| **1** | 2 |
| **2** | 1 |
| **3** | 1 |
| **4** | 3 |
| **5** | 4 |
| **6** | 8 |
| **7** | 2 |
| **8** | 3 |
| **9** | 1 |
| **10** | 0 |
| **Σ** | 25 |

$\longrightarrow$ **MODA** → Nesse caso a distribuição é Unimodal e sua Moda é **6**

Quando os dados estiverem agrupados em intervalos de classe, usaremos a fórmula de Czuber para cálculo da Moda:

$$\boxed{\mathbf{Mo} = \ell + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot h}$$

Onde: $\ell$ = limite inferior da classe modal
**$\Delta_1$** = diferença entre a freqüência da classe modal e a imediatamente anterior
**$\Delta_2$** = diferença entre a freqüência da classe modal e a imediatamente posterior
**h** = amplitude da classe

OBS.: Classe modal é a classe que contém a maior freqüência.

Exemplo:

| **Nota ($X_i$)** | **$F_i$** |
|---|---|
| 0 \|— 2 | 2 |
| 2 \|— 4 | 2 |
| 4 \|— 6 | 7 |
| 6 \|— 8 | 10 |
| 8 \|— 10 | 4 |
| **Σ** | 25 |

Usando a fórmula de Czuber para cálculo da Moda:

$$\mathbf{Mo} = 6 + \frac{3}{3+6} \cdot 2 \Rightarrow \mathbf{Mo} = 6 + \frac{2}{3} \Rightarrow \mathbf{Mo = 6{,}67}$$